

셸 구조물의 유한요소해석에 대하여

On the Finite Element Analysis of Shell Structures

이필승* · 노혁천**

Lee, Phill-Seung · Noh, Hyuk-Chun

Abstract

Based on recent research works, important concepts on the finite element analysis of shell structures and the relations among them are presented in this paper. We review the basic shell mathematical model, which is the underlying mathematical model of the continuum mechanics based shell finite elements. The asymptotic theory of shell structures then is reviewed and we present how to evaluate the asymptotic behavior in finite element solutions. S-norm is introduced as an error measure of finite element solutions and we show “locking” in the convergence curves of shell finite element solutions. We discuss the concept of “uniform optimal convergence” in finite element analysis of shells. We finally summarize requirements on ideal shell finite elements and propose how to perform benchmark tests of shell finite elements.

Keywords : shell structures, finite elements, asymptotic behavior, uniform optimal convergence, benchmark tests

요 지

본 논문에서는 최근 주요 연구들을 토대로 셸 구조물의 유한요소해석에 대하여 중요한 개념들과 그 연관관계를 고찰한다. 감절점 셸 유한요소의 수학적모델인 기본셸수학모델을 살펴본다. 셸 구조물의 두께가 얇아짐에 따라 일어나는 셸 구조문제의 세가지 극한거동들(휨지배거동, 막지배거동, 혼합지배거동)에 대한 셸의 점근거동 이론을 소개하고 점근거동을 유한요소해석을 통해 찾아내는 방법을 알아본다. 유한요소해의 오차를 s-norm으로 평가하는 방법을 소개하고 이를 이용하여 셸 유한요소의 잠김현상이 유한요소해의 수렴곡선에 어떻게 나타나는지 살펴본다. 셸 구조물의 유한요소해석에서 균일최적수렴의 개념을 논의한다. 마지막으로 이상적인 셸 유한요소의 조건을 알아보고 셸 유한요소의 성능평가를 위한 방법론을 제시한다.

핵심용어 : 셸 구조물, 유한요소해석, 점근거동, 균일최적수렴, 성능시험

1. 서 론

계란의 외피가 얼마나 큰 외력에 견딜 수 있는가 하는 것은 일반 대중들에게도 잘 알려져 있는 사실이다. 그 밖에도 우리는 자연 속에서 갑각류의 표피나 조개 껍질과 같은 여러 종류의 셸 구조물들(shell structures)을 접할 수 있다. 이런 자연의 예들은 셸 구조가 매우 이상적이고 효과적인 구조물의 한 형태라는 것을 간접적으로 증명하고 있다. 인간이 만들어낸 셸 구조물들도 셀 수 없이 다양하고 많으며 우리는 셸 구조물들 속에서 살고 있다고 해도 과언이 아니다.

유한요소법(finite element method)은 셸 구조물의 선형 및 비선형 해석에 가장 널리 쓰이는 방법으로 지난 수십 년 동안 셸 구조물의 유한요소해석에 대한 연구가 활발하게 이루어져 오고 있다(Bathe, 1996; 최창근, 2002; Chapelle and Bathe, 2003; Noh, 2006). 그러나 셸 구조물은 셸의 형상, 경계조건, 하중 등에 따라 아주 다양한 거동을 보이며 특히 셸의 두께가 얇을 경우 거동의 특성이 매우 민감해지

기 때문에 셸 구조물의 유한요소해석에 앞서 근본적인 셸 이론 및 물리적 거동에 대한 이해가 필수적이다(Chapelle and Bathe, 1998; Lee and Bathe, 2002; Chapelle and Bathe, 2003). 이러한 셸 구조물의 거동에 대한 이해의 핵심은 셸 구조물의 두께가 얇아짐에 따라 나타나는 점근거동(asymptotic behavior)을 연구하는 것이다(Lee and Bathe, 2002; Bathe, Chapelle and Lee, 2003). 셸 구조물의 점근거동은 일반적으로 휨지배(bending dominated)거동, 막지배(membrane dominated)거동, 혼합(mixed)지배거동 등으로 나누어진다.

일반적으로 공학(engineering)에서 주어진 문제를 풀기 위한 접근방법은 실험(experiment)과 관찰(investigation)을 통하여 물리적 거동을 살펴본 후 그 물리문제의 중요한 특성/인자를 찾아내고 그에 따른 여러 가지 가정들(assumptions)을 사용하여 문제를 단순화시켜 수학적모델(mathematical model)을 만든다. 수학적모델은 주어진 물리문제를 이론적으로 접근할 수 있는 방법을 제공해 준다. 수학적모델의 해는 이론

*정희원 · 교신저자 · 삼성중공업(주) 건설부문 과장 (E-mail : phillseung.lee@samsung.com)
**정희원 · 세종대학교 교수 (E-mail : cpebach@sejong.ac.kr)

적인 방법으로 구해질 수 있으나 풀고자 하는 문제가 매우 복잡할 때는 해를 구하기가 거의 불가능하다. 수치해석(numerical analysis)을 이용하면 복잡한 물리문제의 근사해(approximation)를 구할 수 있고 그 결과를 실험/관찰 결과와 비교하면 수학적모델이나 수치해석의 적정성을 평가할 수 있다.

이와 같은 일련의 작업들, 즉, 물리적 거동, 수학적모델, 수치해석은 서로 밀접하게 연관되어 있다. 그러므로, 쉘 구조물의 유한요소해석을 명확하게 이해하기 위해서는 쉘 구조물의 물리적 거동에 대한 이해, 쉘의 수학적모델(mathematical shell model)에 대한 이해와 쉘 유한요소해에 대한 이해가 동시에 체계적이고 심도 있게 이루어져야 한다. 세가지 모두에 대한 통합적인 이해가 없을 경우 쉘 구조물의 유한요소해석에 있어서 중대한 오류를 범할 수 있다. 본 논문의 목적은 이 각각의 세가지 부분에 대한 이해와 이들이 서로 어떻게 유기적으로 관계를 맺고 있는지를 최근 주요 연구들(Lee and Bathe, 2002; Chapelle and Bathe, 2003; Bathe, Chapelle and Lee, 2003; Hiller and Bathe, 2003; Lee and Bathe, 2005)을 중심으로 정리하여 고찰해 보고 이상적인 쉘 유한요소의 성질과 쉘 유한요소의 성능평가 방법을 제시하는 것이다. 특히 쉘 구조물의 설계를 위하여 유한요소해석을 수행하는 기술자들(engineers)이나 유한요소법을 공부/연구하는 학생/연구자들의 “쉘 구조물의 유한요소해석에 대한 이해”를 돕고자 하는데 글의 초점을 맞추었다.

유한요소법에 의해 쉘 구조물을 효과적으로 해석하기 위해서는 신뢰할 만한 쉘 유한요소를 사용해야 한다는 것은 자명하다. 일반적으로 변위법에 의해 정식화(displacement based formulation)된 쉘 유한요소는 사용된 근사함수(interpolation function)의 차수(order)에 상관없이 횡지배 및 혼합지배거동을 하는 쉘 구조물에 대하여 과도한 강성을 나타낸다(Bathe, 1996; Chapelle and Bathe, 2003). 이를 잠김현상(locking phenomenon)이라 하며 효과적인 쉘 유한요소의 개발에 있어서 극복해야 할 어려운 문제들 중의 하나이다. 이상적인 쉘 유한요소는 여러 가지 접근거동과 다양한

형상의 쉘 구조문제에 있어서 균일최적수렴(uniform optimal convergence)을 보여야 하며 이상적인 쉘 유한요소를 개발하는 것은 매우 어려운 일이다.

본 논문에서는 먼저 쉘의 대표적인 수학적모델을 설명하고 쉘 구조물의 점근거동에 대한 기본이론을 살펴본 후 임의의 쉘 구조물의 점근거동을 어떻게 알아낼 수 있는지를 알아본다. 또한 쉘 유한요소해의 오차(error)를 평가하는 기준을 살펴보고 이를 바탕으로 잠김현상 발생 시의 쉘 유한요소의 수렴과 균일최적수렴에 대해 알아본다. 마지막으로 이상적인 쉘 유한요소와 쉘 유한요소의 성능평가에 대하여 논한다. 앞으로 논의하는 내용은 등방성재료(isotropic material)에 대한 선형탄성(linear elastic)이론에 국한된다.

2. 쉘의 수학적모델(mathematical shell model)

기본쉘수학적모델(basic shell mathematical model)은 쉘 구조물의 휨(bending)거동, 면내(membrane)거동, 면외전단(transverse shearing)거동과 그 상호연관(coupling)관계를 모두 표현할 수 있는 가장 일반적인 쉘 수학적모델로 3차원 연속체 역학으로부터 유도된 감절점 쉘 유한요소(Ahmad, Irons and Zienkiewicz, 1970; Bathe, 1996)와 동일한 변형을 향들을 가지고 있다(Chapelle and Bathe, 1998; Chapelle and Bathe, 2003; Lee and Bathe, 2005). 즉, 기본쉘수학모델은 감절점 쉘 유한요소의 수학적모델인 것이다. 본 장에서는 미분기하학(differential geometry)을 이용하여 쉘의 형상(geometry)과 변형거동(kinematics)을 살펴보고 기본쉘수학모델의 유도를 보여준다.

2.1 쉘의 형상 (shell geometry)

쉘은 두께(thickness)가 얇은 3차원 구조물이다. 두께가 얇다는 특징 때문에 쉘의 형상은 쉘의 중심면으로 이루어진 2차원 영역과 두께에 의하여 정의 될 수 있다. 여기서는 기본쉘수학모델에서 쓰이는 쉘의 형상에 관한 개념을 미분기하학을 통하여 보여준다.

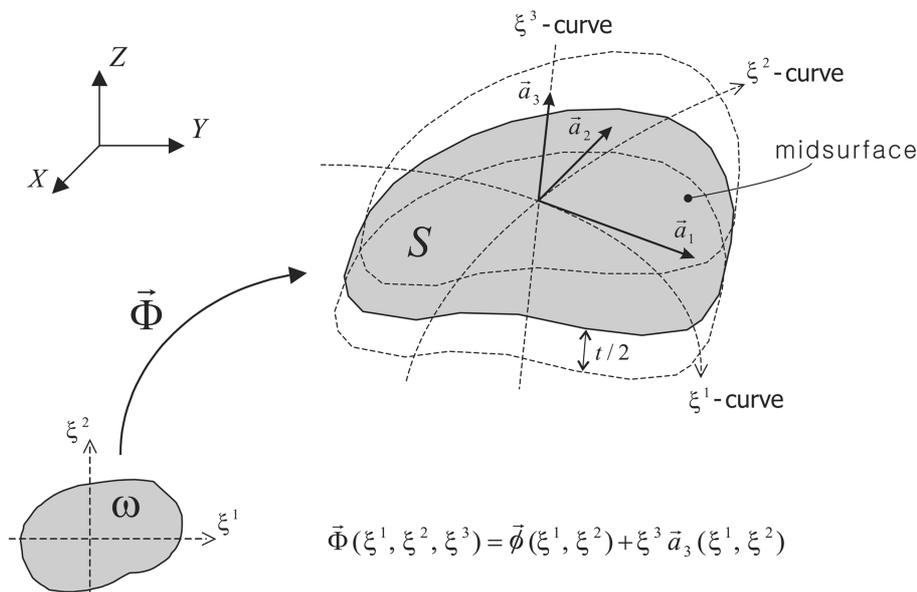


그림 1. 쉘의 형상

미분기하학의 정의들을 유도하기 위하여 아인슈타인 합표 시규약(Einstein summation convention)을 사용한다. $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ 는 1에서 2까지 변하며 i, j, k 는 1에서 3까지 변하는 첨자(index)들이다.

셸의 중심면(midsurface)은 그림 1에서 보이는 2차원 영역 ω 에서 S 로의 사상(mapping)을 나타내는 함수 $\vec{\phi}$ 에 의하여 정의 된다. 중심면의 공변기저벡터(covariant base vector)는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha} \quad (1)$$

위의 식의 공변(covariant)기저벡터에 대응하는 반변기저벡터(contravariant base vector)는 다음의 관계에 의하여 얻어진다.

$$\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (2)$$

여기서 δ_β^α 는 α 와 β 가 같을 때 1이고 다를 때 0인 Kronecker symbol이다. 셸의 중심면에 수직인 벡터는 중심면의 공변(covariant)기저벡터들의 벡터곱(vector product)으로 정의 된다.

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \quad (3)$$

셸의 3차원 기하형상은 다음 식으로 표현된다.

$$\vec{\Phi}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{a}_3(\xi^1, \xi^2) \quad (4)$$

여기서 변수 ξ^1, ξ^2, ξ^3 의 영역은 다음과 같다.

$$\Omega = \left\{ (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathfrak{R}^3 \mid (\xi^1, \xi^2) \in \omega, \xi^3 \in \left[\frac{t(\xi^1, \xi^2)}{2}, \frac{t(\xi^1, \xi^2)}{2} \right] \right\} \quad (5)$$

여기서 t 는 셸의 두께이다.

위의 정의들을 이용하여 셸의 중심면에서 surface 텐서들(tensors)을 정의 할 수 있다. 첫 번째 기본텐서는 2D metric 텐서로 공변형(covariant type)은 다음 식과 같다.

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \quad (6)$$

위 식의 반변형(contravariant type)은 다음과 같이 나타난다.

$$a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta \quad (7)$$

두 번째 기본텐서는 곡률(curvature)텐서로서 셸 중심면의 곡률에 관한 정보를 담고 있다. 공변형(covariant type)은 다음과 같다.

$$b_{\alpha\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta} \quad (8)$$

또한 위 식의 합성형(mixed)텐서는 다음 식과 같다.

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} \quad (9)$$

세 번째 기본텐서는 다음과 같이 정의 된다.

$$c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \quad (10)$$

셸의 중심면에서의 벡터를 $\vec{\gamma}$ 라고 하면 이 벡터의 공변미분(covariant derivative)은 다음 식으로 나타난다.

$$w_{\alpha\beta} = w_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda w_\lambda \quad (11)$$

여기서 $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ 는 면에서의 Christoffel symbol이다.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \vec{a}_{\alpha,\beta} \cdot \vec{a}^\lambda \quad (12)$$

식 (4)로부터 3차원 공변(covariant)기저벡터를 얻을 수 있다.

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{\Phi}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^i} \quad (13)$$

그리고 위 식으로부터 다음 식들이 얻어진다.

$$\vec{g}_\alpha = \vec{a}_\alpha - \xi^3 b_\alpha^\lambda \vec{a}_\lambda \quad (14)$$

$$\vec{g}_3 = \vec{a}_3 \quad (15)$$

3차원 반변(contravariant)기저벡터는 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \delta_j^i \quad (16)$$

2.2 셸의 변형거동(shell kinematics)

셸의 변형거동에 있어서 기본이 되는 가정은 변형전 셸의 중심면에 수직인 직선은 변형중에도 직선을 유지하며 늘어나거나 줄어들지 않는다는 것이고, 이때 셸의 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \vec{u}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \theta_\lambda(\xi^1, \xi^2) \vec{a}^\lambda(\xi^1, \xi^2) \quad (17)$$

여기서 $\vec{u}(\xi^1, \xi^2)$ 는 셸의 중심면의 미소변위(infinitesimal translation)를 나타내고 $\theta_\lambda(\xi^1, \xi^2)$ 는 셸의 중심면에 수직인 직선의 미소회전(infinitesimal rotation)을 나타낸다. $\theta_\lambda \vec{a}^\lambda$ 는 회전 벡터 $\vec{\theta}$ 이고 $\xi^3 \theta_\lambda \vec{a}^\lambda$ 는 그 회전 벡터에 의한 변위를 나타낸다. 직선변위 \vec{u} 는 반변(contravariant)기저벡터 $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3 (= \vec{a}_3)$ 에 의하여 주어진다.

선형해석을 위한 3차원 Green-Lagrange 공변변형률(covariant strain) 텐서의 선형부분은 다음과 같이 정의 된다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\vec{g}_i \cdot \vec{U}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \vec{U}_{,i}) \quad (18)$$

여기서

$$\vec{U}_{,i} = \frac{\partial \vec{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^i} \quad (19)$$

식 (14), (15)와 (17)을 식 (18)에 대입시키면 변형률 텐서의 공변(covariant)항들을 얻을 수 있다.

$$e_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) + \xi^3 \chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \vec{\theta}) - (\xi^3)^2 \kappa_{\alpha\beta}(\vec{\theta}) \quad (20a)$$

$$e_{\alpha 3} = \zeta_\alpha(\vec{u}, \vec{\theta}) \quad (20b)$$

$$e_{33} = 0 \quad (20c)$$

여기서

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (u_{\alpha\beta} + u_{\beta\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3 \quad (21a)$$

$$\chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \vec{\theta}) = \frac{1}{2} (\theta_{\alpha\beta} + \theta_{\beta\alpha} - b_\beta^\mu b_{\mu\alpha}^\lambda - b_\alpha^\mu b_{\mu\beta}^\lambda) + c_{\alpha\beta} u_3 \quad (21b)$$

$$\kappa_{\alpha\beta}(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} (b_\beta^\lambda \theta_{\lambda\alpha} - b_\alpha^\lambda \theta_{\lambda\beta}) \quad (21c)$$

$$\zeta_\alpha(\vec{u}, \vec{\theta}) = \frac{1}{2} (\theta_\alpha + u_{3,\alpha} + b_\alpha^\mu u_\mu) \quad (21d)$$

등방성재료(isotropic material)에 대한 평면응력조건(plane

stress condition)을 적용하면 면에 수직인 응력은 0이며 ($\sigma_{33} = 0$) 이때 응력과 변형률의 상관관계는 다음과 같다.

$$\sigma^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\lambda\mu} \quad (22a)$$

$$\sigma^{\alpha 3} = \frac{1}{2} D^{\alpha\lambda} e_{\lambda 3} \quad (22b)$$

위의 식 (22)에서

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1-\nu)} \left(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1+\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \right) \quad (23a)$$

$$D^{\alpha\lambda} = \frac{2E}{1+\nu} g^{\alpha\lambda} \quad (23b)$$

여기서 E 는 재료의 탄성계수(elastic modulus)이고 ν 는 포아송비(Poisson's ratio)이며 $g^{\alpha\beta}$ 는 식 (14)의 3차원 반변(contravariant)기저벡터로 정의된 metric텐서이다($g^{\alpha\beta} = \vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}^\beta$).

셸 구조물에 강체운동(rigid body motion)이 일어나지 않도록 적절한 변위경계조건이 주어지면 식 (20)에서 (23)까지를 이용하여 기본셸수학모델(basic shell mathematical model)의 지배변분식(variational equation)을 얻을 수 있다.

해를 구하는 과정은 모든 임의의 시험함수(test function) \vec{V} 에 대하여 다음 식 (24)와 변위 경계조건을 만족시키는 미지변위 \vec{U} 를 찾는 것으로 나타내어질 수 있다.

$$\int_{\Omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta}(\vec{U}) e_{\lambda\mu}(\vec{V}) dV + \int_{\Omega} D^{\alpha\lambda} e_{\alpha 3}(\vec{U}) e_{\lambda 3}(\vec{V}) dV = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{V} dV \quad (24)$$

여기서 \vec{F} 는 셸 구조물에 작용하는 외력(external loading)이며 시험함수는 변위경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\vec{V}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \vec{v}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \eta_\lambda(\xi^1, \xi^2) \vec{a}^\lambda(\xi^1, \xi^2) \quad (25)$$

3. 셸 구조물의 점근거동

휨(bending), 막(membrane), 면외전단(transverse shearing) 작용들은 셸 구조물이 하중을 지지하는 기본적인 원리(mechanism)이다. 그러므로 하중 재하 시 셸 구조물은 휨, 막, 전단 에너지를 그 내부에 저장하게 된다. 셸의 두께가 얇아짐에 따라 셸의 전단 에너지는 무시할 만큼 작아지므로 셸 구조물의 에너지는 주로 휨 에너지와 막 에너지에 의해 구성된다고 할 수 있다.

셸은 그 두께가 얇아짐에 따라 특정한 한계거동 - 휨지배(bending dominated)거동, 막지배(membrane dominated)거동, 혼합(mixed)지배거동 - 을 보이게 되며 이를 셸의 점근거동(asymptotic behavior)이라 한다. 셸의 두께가 얇아짐에 따라 셸 구조물이 주로 휨 거동에 의해 하중을 지탱할 경우 그 셸 구조물을 휨지배 셸(bending dominated shell) 구조물이라 부르며 막거동에 의해 하중을 지탱할 경우 막지배 셸(membrane dominated shell) 구조물이라 한다. 또한 두께가

얇아짐에 따라 셸 구조물이 휨과 막거동 두 가지 모두에 의해 외력을 지지할 경우 혼합(mixed)지배 셸 구조물이라 한다. 셸 구조물의 점근거동은 셸의 형상(geometry), 경계조건(boundary condition), 하중(load)에 따라 달라진다(Lee and Bathe, 2002; Bathe, Chapelle and Lee, 2003; Chapelle and Bathe, 2003).

3.1 점근거동의 분류

식 (24)에서 구해진 선형 셸 이론의 변분식(variational form)을 두께(t)에 대하여 정리하여 t 의 고차항을 제거하면 다음과 같이 간략화하여 나타낼 수 있다.

Find $\vec{U} \in \vec{\Psi}$ such that

$$\varepsilon^3 A_b(\vec{U}, \vec{V}) + \varepsilon A_m(\vec{U}, \vec{V}) = \vec{F}(\vec{V}), \forall \vec{V} \in \vec{\Psi} \quad (26)$$

여기서 ε 는 셸의 두께와 전체 셸 구조물 크기의 비(t/L), $\varepsilon^3 A_b(\cdot, \cdot)$ 는 휨 에너지, $\varepsilon A_m(\cdot, \cdot)$ 은 막 및 전단 에너지에 대응하는 곱선형식들(bilinear forms)이며, \vec{U} 는 변위장의 해, \vec{V} 는 시험함수, $\vec{\Psi}$ 는 Sobolev 공간(space)¹, $\vec{F}(\cdot)$ 는 외력에 대응하는 선형식(linear form)을 나타낸다. 일반적으로 셸의 두께가 얇을 때 전단 에너지는 막 에너지에 비해 매우 작으므로 εA_m 을 막 에너지에 대응하는 항이라고 부를 수 있다.

ε 이 작아짐에 따른 셸의 점근거동을 살펴 보기 위해 ε^ρ (ρ = load scaling factor)가 곱해진 외력(scaled loading)을 사용한다.

$$\vec{F}(\vec{V}) = \varepsilon^\rho \vec{G}(\vec{V}) \quad (27)$$

여기서 \vec{G} 는 $\vec{\Psi}'$ ($\vec{\Psi}$ 의 dual space²)에 속하며 ρ 는 실수이다. 식 (26)의 좌변의 각 항은 ε^3 과 ε 에 비례하므로 ρ 는 1보다 크거나 같고 3보다 작거나 같은 실수임을 알 수 있다.

$$1 \leq \rho \leq 3 \quad (28)$$

다음의 공간(space)은 셸의 점근거동에 중요한 역할을 한다.

$$\vec{\Psi}_0 = \left\{ \vec{V} \in \vec{\Psi} \mid A_m(\vec{V}, \vec{V}) = 0 \right\} \quad (29)$$

$\vec{\Psi}_0$ 공간은 순수 휨(pure bending)을 나타내는 변위의 공간이며 막 및 전단 에너지를 0으로 만들 수 있는 모든 변위의 형태들(patterns)을 포함한다. 이 공간(space)이 단지 모든 변위를 0으로 하는 변위의 형태들만을 가지고 있을 때 셸 구조물에서 순수 휨거동이 구속되었다고 하며 그러한 셸을 순수 휨이 구속된 셸(inhibited shell)이라 한다. 반면에 셸이 모든 변위가 0인 형태(pattern)가 아닌 순수 휨 모드(mode)를 가지고 있을 경우 그 셸 구조물을 순수 휨이 구속되지 않은 셸(non-inhibited shell) 구조물이라 한다. 셸의 점근거

¹탄성문제에서 변위경계조건을 만족시키는 Sobolev 공간은 H_0^1 으로 표기되며 정의는 다음과 같다.

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \vec{V}: \vec{V} \in L^2(\Omega); \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega); V_i = 0 \text{ at prescribed displacement boundary} \right\}$$

여기서 $L^2(\Omega) = \vec{V}: \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (V_i)^2 d\Omega < +\infty$ 이다(Bathe, 1996).

² $\vec{\Psi}$ 공간위의 모든 선형식 \vec{F} 들의 공간을 $\vec{\Psi}'$ 의 dual space(쌍대공간)라고 부르며 $\vec{\Psi}'$ 로 표기한다.

표 1. 셸의 점근거동의 분류

경우	하중	분류
순수 휨이 구속되지 않은 셸 구조물, $\vec{\Psi}_0 \neq \{0\}$	순수 휨을 유발하는 외력 $\exists \vec{V} \in \vec{\Psi}_0$ such that $\vec{G}(\vec{V}) \neq 0$	(i) 휨지배거동
	순수 휨을 유발하지 않는 외력 $\vec{G}(\vec{V}) = 0, \forall \vec{V} \in \vec{\Psi}_0$	(ii) 불안정한 막지배 또는 혼합지배거동
순수 휨이 구속된 셸 구조물, $\vec{\Psi}_0 = \{0\}$	Admissible membrane loading $\vec{G} \in \vec{\Psi}_m'$	(iii) 막지배거동
	Non-admissible membrane loading $\vec{G} \notin \vec{\Psi}_m'$	(iv) 혼합지배거동

동은 순수 휨이 구속되어 있는가아닌가에 따라 변한다.

순수 휨이 구속되지 않은 경우(즉, $\vec{\Psi}_0 \neq \{0\}$)는 주로 셸 구조의 휨지배 상태를 이끌어낸다. 이때 적당한 ρ 의 값은 3이며 식 (26)의 막 에너지 항이 사라지면서 이 경우 식 (26)의 셸 문제는 다음과 같이 표현될 수 있다.

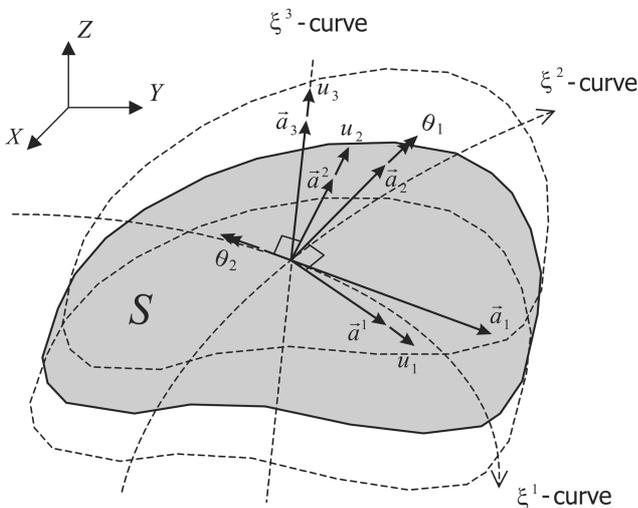
$$\text{Find } \vec{U}^0 \in \vec{\Psi}_0 \text{ such that}$$

$$A_b(\vec{U}^0, \vec{V}) = \vec{G}(\vec{V}), \forall \vec{V} \in \vec{\Psi}_0 \quad (30)$$

순수 휨이 구속되지 않은 경우의 휨지배 상태는 하중이 휨 변위를 유발 시켜야만 일어날 수 있다. 만일 하중이 휨을 유발할 수 없다면 이론적인 점근거동은 휨이 구속된 경우와 같게 되나 이 경우 거동은 매우 불안정(unstable)하다. 즉, 이런 경우 작은 하중의 변화로 셸 구조물의 점근거동을 막 지배거동에서 휨지배거동으로 바꿀 수 있다.

순수 휨이 구속된 경우(즉, $\vec{\Psi}_0 = \{0\}$), 적절한 ρ 값은 1이며 막과 전단 에너지만을 유발시킬 수 있는 변위공간(space) $\vec{\Psi}_m$ 에 의해 구조물의 거동이 표현될 수 있다. 그러므로 이 공간(space)의 크기는 $\vec{\Psi}$ 보다 크다. 막지배거동의 한계문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Find } \vec{U}^m \in \vec{\Psi}_m \text{ such that}$$



$$\vec{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \vec{u}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \theta_\lambda(\xi^1, \xi^2) \vec{a}^\lambda(\xi^1, \xi^2)$$

그림 2. 셸의 변형거동

$$A_m(\vec{U}^m, \vec{V}) = \vec{G}(\vec{V}), \forall \vec{V} \in \vec{\Psi}_m \quad (31)$$

여기서 외력 \vec{G} 가 $\vec{\Psi}_m$ 의 dual space에 속해야만 막지배거동의 한계문제가 잘 정의 되며 이 조건($\vec{G} \in \vec{\Psi}_m'$)은 다음 식과 동일하다.

$$|\vec{G}(\vec{V})| \leq c \sqrt{A_m(\vec{V}, \vec{V})}, \forall \vec{V} \in \vec{\Psi} \quad (32)$$

여기서 c 는 상수이다. 위 식은 제한된 외력이 막응력만에 의하여 지지될 수 있다는 것을 뜻하며 이런 조건을 만족시키는 외력을 “admissible membrane loading”이라고 부른다. 만일 외력이 “non-admissible membrane loading ($\vec{G} \notin \vec{\Psi}_m'$)” 이라면 이 경우 막지배 문제는 정의 될 수 없으며 셸의 점근거동은 막과 휨의 혼합된 형태(mixed type)를 띠게 된다.

표 1은 위에서 언급된 셸 구조물의 점근거동을 정리(요약)하여 보여준다. 셸 구조물의 설계 시 이러한 점근거동에 대한 지식은 매우 유용하며 필수적이다. 주어진 하중에 대하여 셸 구조물의 강성은 ϵ^ρ 에 비례하여 변한다. 즉, 셸 구조물의 거동이 휨에 의해 지배 받게 될 경우 구조물의 강성은 $(t/L)^3$ 에 비례 하게 되며 막거동에 의해 지배될 경우 강성은 t/L 에 비례하게 된다. 그러므로 효과적인 셸 구조물은 휨거동이 구속되어 막거동에 의해 지배되는 구조물이며 셸 구조물은 막지배거동을 하도록 설계하는 것이 바람직하다. 주어진 외력에 대하여 셸의 형상과 경계조건을 적절히 사용하여 최대의 기하학적 강성(geometrical rigidity)을 갖을 수 있도록 하여야 한다.

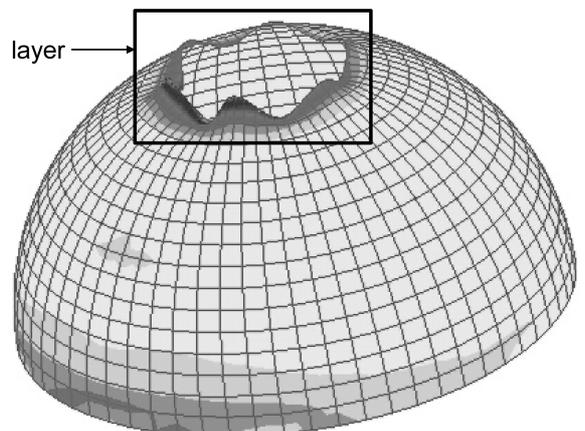


그림 3. 셸의 변형형상과 유효응력분포에 나타난 경계층(boundary layer)

3.2 셸의 층과 특성길이

셸의 응력/변형률/변위장들은 그 변화가 매끄러운 영역들 (smooth areas)과 그렇지 않은 여러 종류의 층들(layers)로 나누어진다. 층(layer)은 곡률(curvature)이나 두께의 변화와 같은 셸의 형상의 변화, 적합하지 않은 변위경계조건 (incompatible boundary condition), 불규칙한 하중(irregular loading) 등에 의하여 유발된다(Lee and Bathe, 2002). 층(layer)에서는 응력/변형률/변위 등이 매우 급하게 변하며 변형에너지의 집중이 일어난다. 층의 특성길이(L_c , characteristic length)는 셸 구조물의 두께에 따라 변하며 셸의 두께(t)와 전체 셸 구조물 길이(L)의 함수로 나타나다.

$$L_c = ct^{1-l}L^l \quad (33)$$

여기서 c 는 상수이며 l 은 양의 실수 이다.

참고문헌(Lee and Bathe, 2002)는 셸의 두께가 얇아짐에 따라 나타나는 Scodelis-Lo roof shell problem에서의 경계층(boundary layer)과 쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid) 셸 구조문제의 내부층(inner layer)을 보여준다. 참고문헌(Bathe, Chapelle and Lee, 2003)에서는 또 다른 형태의 경계층이 셸의 두께가 얇아짐에 따라 변화하는 것을 보여준다. 그림 3은 셸의 변형형상(deformed shape)과 유효응력(effective stress)분포에 나타난 경계층(boundary layer)의 예를 보여주고 있다.

3.3 점근거동의 해석

이론적인 방법으로 일반적인 셸 구조물의 점근거동을 알아 내려는 시도는 Lovadina를 비롯한 많은 연구자들에 의해 수행되었으나 쉬운 일이 아니었다(Lovadina, 2001). 근래에 수치적인 방법에 의해 점근거동을 알아내는 연구가 진행되었으며 유한요소해석을 통한 여러 가지 방법이 Lee와 Bathe에 의해 제안되었다(Lee and Bathe, 2002; Bathe, Chapelle and Lee, 2003). 본 논문에서는 가장 손쉬운 한가지 방법을 소개한다.

셸 구조물의 ρ (load scaling factor) 값을 구하게 되면 그 구조물의 점근거동을 알아낼 수 있다. 다음은 Lee와 Bathe에 의해 제안된 ρ 의 근사 값을 구하는 식이다.

$$\rho \approx \frac{\log E(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \log E(\varepsilon)}{\log(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \log \varepsilon} \quad (34)$$

여기서 E 는 $\varepsilon(=t/L)$ 에 대한 유한요소해석으로부터 구해진 셸 구조물의 변형에너지(strain energy) 값이다. 주어진 ε 에 대하여 유한요소해의 정확도가 높을수록 보다 정확한 ρ 값을 얻을 수 있다. 계산된 ρ 의 값이 1일 경우 구조물은 막지배 거동을, 3일 경우 휨지배 거동을, 1과 3의 중간 값일 경우 막과 휨의 혼합지배 거동을 한다.

Lovadina는 보간이론(interpolation theory)을 사용하여 셸 구조물의 점근거동을 연구하였으며 ρ 값과 셸 구조물에 저장되는 에너지들과의 관계를 나타내는 흥미로운 식을 제안하였다(Lovadina, 2001).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\varepsilon) = \frac{\rho - 1}{2} \quad (35)$$

여기서 $R(\varepsilon)$ 는 셸 구조물의 전체 변형에너지에 대한 휨 변

형에너지의 비이다.

$$R(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3 A_b(\vec{U}, \vec{U})}{\varepsilon^3 A_b(\vec{U}, \vec{U}) + \varepsilon A_m(\vec{U}, \vec{U})} \quad (36)$$

역으로 셸 구조물의 $R(\varepsilon)$ 를 계산하면 또한 셸의 점근거동을 찾을 수 있는 ρ 값을 알 수 있다.

Lee와 Bathe는 셸 유한요소의 성능을 평가(benchmark)하기 위한 셸 문제로 널리 알려져 있는 Scodelis-Lo roof shell problem을 대상으로 하여 ρ 값을 계산하였으며 그 셸 구조물의 점근거동을 보여주었다(Lee and Bathe, 2002). 그 후에 Lovadina는 이론적인 방법을 이용해 같은 문제의 ρ 값을 구하였고 두 결과는 일치하였다. 셸 구조물의 휨지배 거동과 막지배 거동에 대한 보다 자세한 예들을 참고문헌(Lee and Bathe, 2002)에서 볼 수 있으며, 셸 두께의 변화에 따라 ρ 값이 변동(fluctuation)하는 민감한 셸 구조물의 점근거동에 대한 해석이 참고문헌(Bathe, Chapelle and Lee, 2003)에 제시되어 있다.

4. 셸 유한요소의 잠김현상과 균일최적수렴

셸 구조물의 유한요소해석에서 직면한 가장 큰 어려움은 잠김현상(locking phenomenon)이다. 잠김현상은 셸 구조물의 두께가 얇을 수록 유한요소해의 오차(error)를 매우 빠르게 증가시킨다. 본 장에서는 셸의 점근거동에 대한 이해를 바탕으로 셸 유한요소의 잠김현상과 균일최적수렴에 대하여 살펴본다.

4.1 셸 유한요소의 종류와 잠김현상

셸 유한요소의 종류는 크게 평면 셸(flat shell) 유한요소 그룹과 감절점 셸(degenerated shell or continuum mechanics based shell) 유한요소 그룹으로 나뉘어진다(Ahmad, Iron and Zienkiewicz, 1970; Bathe, 1996; Choi, Lee and Park, 1999; 최창근, 2002; Chapelle and Bathe, 2003). 평면 셸 유한요소는 평판 유한요소와 평면응력 유한요소의 결합에 의해 만들어진다. 곡면의 셸 구조물을 여러 개의 평면으로 나누어 표현한다는 물리적 개념에서 출발하였다. 장점은 유한요소 정식화가 쉽고 면내회전자유도(drilling degrees of freedom)를 쉽게 도입하여 절점 당 6개의 자유도를 가질 수 있으며 그로 인해 절점 당 6개의 자유도를 갖는 빔(beam)과 같은 유한요소들과 결합이 편리하다는 것이다. 그러나, 기본적으로 요소자체의 형상이 평면이기 때문에 복잡한 곡면 형태의 셸의 형상과 그 거동을 정밀하게 표현하기 어려워 곡면 셸 구조물의 해석 시 수렴이 느리며 정확해로의 수렴에 실패하는 경우가 발생하는 단점을 가지고 있다. 반면 3차원 연속체역학에 근거한 감절점 셸 요소는 절점 당 5개의 자유도를 가지고 있어 빔과 같은 유한요소들과의 결합 시 특별한 인위적인 방법이 필요하지만 셸 고유의 복잡한 곡면 형상과 그 거동을 잘 표현해 낼 수 있고 정확해로의 수렴속도가 빠르다. 또한, 2장에서 설명된 비와 같이 가장 일반적인 셸 수학모델(mathematical shell model)인 기본셸수학모델에 근거한다.

셸 유한요소를 유한요소의 정식화(formulation)방법에 따라

분류하면 크게 변위법(displacement based method)에 의한 쉘 유한요소와 혼합법(mixed method)에 의한 쉘 유한요소로 나눌 수 있다. 변위법에 근거한 쉘 유한요소(displacement based shell finite element)는 막지배 구조물들의 해석에 있어서 이상적인 거동을 보인다. 그러나 요소의 종류와 근사 차수(interpolation order)에 상관없이 두께가 얇은 휨지배(bending dominated) 또는 혼합지배(mixed) 쉘 구조물들의 해석에 있어서 유한요소해석의 해가 매우 느리게 수렴하는 치명적인 단점을 가지고 있는데 이를 잠김(locking)현상이라고 한다. 주어진 요소망(mesh)에 대하여 유한요소해의 정확성이 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 급속히 나빠지는 현상을 말하며 최악의 경우 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 변위장이 0에 수렴하게 된다.

잠김현상은 막잠김(membrane locking)과 전단잠김(shear locking)현상으로 나누어질 수 있으며 잠김현상이 일어나는 근본적인 이유는 변위법에 의한 쉘 유한요소가 식 (29)의 순수 휨 변위공간(space) $\vec{\Psi}_0$ 을 충분히 근사할 수 없기 때문이다. 즉, 잠김현상은 쉘 구조물의 점근거동과 직접적인 연관관계를 가지고 있다. 쉘 구조물의 점근거동이 쉘의 형상, 경계조건, 하중 등에 따라 변하기 때문에 잠김현상 또한 쉘의 형상, 경계조건, 하중에 의존적이다. 막잠김현상은 곡률을 가진 쉘 구조물에서만 발생하고 평면형상의 쉘 구조물에서는 발생하지 않으나 전단잠김현상은 곡률에 관계없이 발생한다.

잠김현상은 휨지배 및 혼합지배거동 시 식 (21a)와 (21d)에 있는 변형률항들로부터 발생한다. 참고문헌(Bathe, Lee and Hiller, 2003)과 (Lee and Bathe, 2005)는 잠김현상이 유한요소해에 어떻게 나타나는지를 보여주고 잠김현상이 제거되기 어려운 근본적인 이유를 잘 설명하고 있다.

실제 쉘 유한요소해석에 있어서 잠김현상은 과도한 강성 또는 그로 인한 과도한 변위, 응력, 변형률 및 변형에너지로 나타난다. 그러므로 두께가 얇은 쉘 구조물의 설계 시 충분히 조밀하지 못한 유한요소망을 사용하여 해석한 결과를 이용할 경우(강성이 과도해지거나) 과소설계의 오류를 범할 수 있다. 이와 같이 유한요소해의 오차 또는 정확도가 쉘 구조물의 두께에 따라 변하는 현상인 잠김현상은 쉘 구조물의 유한요소해석에 있어서 빈번하게 일어나기 때문에 쉘 구조물의 해석에 앞서 잠김현상에 대한 이해는 필수적이다.

4.2 유한요소해의 오차측정

신뢰할 만한 쉘 유한요소의 해는 사용된 요소의 수가 증가함에 따라 2장에서 설명된 쉘 유한요소의 수학적모델(mathematical shell model)의 정확해(exact solution)에 수렴하여야 하며 잠김현상을 알아보기 위해서는 쉘 유한요소해의 수렴곡선(convergence curve)을 관찰해야 한다. 여기서 쉘 유한요소의 수렴을 측정하기 위하여 적절한 기준(norm)을 사용하는 것이 매우 중요하다. 그 기준(norm)은 한 점에서 특정 물리량 값(point-wise value)의 수렴이 아니라 쉘 구조물 전체 영역에서의 해의 수렴을 고려할 수 있어야 한다. 일반적으로 한 점에서의 변위/응력/변형률 등을 가지고 수렴을 측정하는 방법이 많이 사용되어왔는데 이는 전체영역에서의 수렴을 대표하지 않으므로 적절하지 못하다. 변형

에너지의 산술적 차이 또한 기준으로 사용할 수 있지만 변위법 정식화에 근거한 유한요소가 아닌 경우에는 일반적으로 사용될 수 없기 때문에 정식화의 방법에 관계없이 일반적으로 쓰일 수 있는 기준이 필요하다.

Hiller와 Bathe에 의해 제안된 s-norm($\|\cdot\|_s$)은 쉘 구조물 전체의 거동을 반영할 수 있을 뿐만 아니라 물리적인 개념으로부터 유도되었기 때문에 정식화 방법에 관계없이 사용될 수 있다(Hiller and Bathe, 2003).

$$\|\vec{U}-\vec{U}_h\|_s^2 = \int_{\Omega} \Delta \vec{\epsilon}^T \Delta \vec{\sigma} d\Omega \quad (37)$$

여기서 \vec{U} 는 정확해이며, \vec{U}_h 는 유한요소해이다. \hat{x} 와 $\vec{\sigma}$ 는 전체직각좌표계(global Cartesian coordinate system)에서 정의된 변형률 벡터와 응력 벡터이다.

$$\hat{\epsilon} = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, 2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{yz}, 2\epsilon_{zx}]^T \quad (38a)$$

$$\vec{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}]^T \quad (38b)$$

식 (37)에서 변형률과 응력에 대하여 정확해와 유한요소해의 차이(difference)는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\Delta \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} - \hat{\epsilon}_h = \hat{\epsilon}(\hat{x}) - \mathbf{B}_h(\hat{x}_h) \vec{U}_h \quad (39a)$$

$$\Delta \vec{\sigma} = \vec{\sigma} - \vec{\sigma}_h = \vec{\sigma}(\hat{x}) - \mathbf{C}_h(\hat{x}_h) \mathbf{B}_h(\hat{x}_h) \vec{U}_h \quad (39b)$$

여기서 \mathbf{C} 는 재료의 응력-변형률 관계 행렬(matrix)이고 \mathbf{B} 는 변형률-변위(strain-displacement)관계 연산자(operator)이다. 위치벡터 \hat{x} 와 \hat{x}_h 는 각각 원래 쉘 구조물의 영역(domain)과 이산화된 유한요소 모델의 영역에 대응된다. 두 벡터의 관계는 일대일 사상(injective mapping, Π)에 의하여 정의할 수 있다.

$$\hat{x} = \Pi(\hat{x}_h) \quad (40)$$

일반적인 쉘 구조물문제에 있어서 이론적인 방법을 이용하여 정확해를 찾아내는 것은 거의 불가능하므로 매우 조밀한 유한요소망을 사용하여 계산된 해를 정확해로 고려하여 s-norm을 계산하는 것이 훨씬 실용적이다. 정확해로 고려된 유한요소해를 \vec{U}_{ref} 라고 하면 위식의 s-norm은 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$\|\vec{U}_{ref}-\vec{U}_h\|_s^2 = \int_{\Omega_{ref}} \Delta \vec{\epsilon}^T \Delta \vec{\sigma} d\Omega_{ref}, \quad (41)$$

여기서

$$\Delta \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_{ref} - \hat{\epsilon}_h = \mathbf{B}_{ref}(\hat{x}_{ref}) \vec{U}_{ref} - \mathbf{B}_h(\hat{x}_h) \vec{U}_h, \quad (42a)$$

$$\Delta \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{ref} - \vec{\sigma}_h = \mathbf{C}_{ref}(\hat{x}_{ref}) \mathbf{B}_{ref}(\hat{x}_{ref}) \vec{U}_{ref} - \mathbf{C}_h(\hat{x}_h) \mathbf{B}_h(\hat{x}_h) \vec{U}_h, \quad (42b)$$

$$\hat{x}_{ref} = \Pi(\hat{x}_h) \quad (42c)$$

다양한 쉘 구조물문제와 여러 경우의 쉘 두께에 대하여 유한요소해의 수렴을 상호 비교 가능하게 하기 위해서는 상대오차(relative error)를 사용하여야 한다. 상대오차(E_h)는 다음과 같이 정의된다.

$$E_h = \frac{\|\vec{U}_{ref}-\vec{U}_h\|_s^2}{\|\vec{U}_{ref}\|_s^2} \quad (43)$$

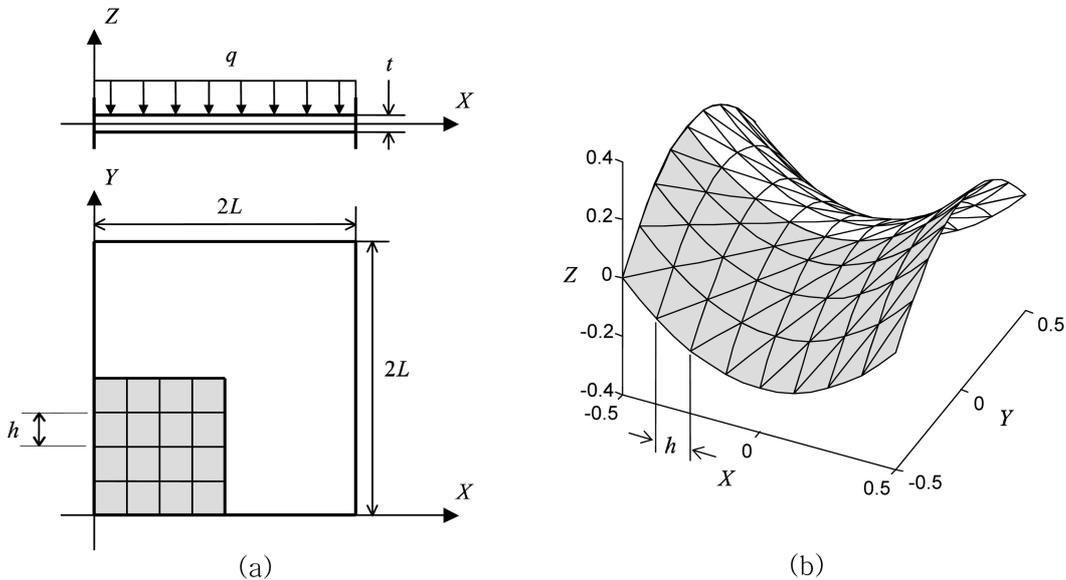


그림 4. 쉘 구조문제들: (a) 네 변이 완전히 구속된 평판 휨 구조문제($L=1.0$), (b) 한 변이 완전히 구속된 쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid) 쉘 구조문제($L=1.0$)

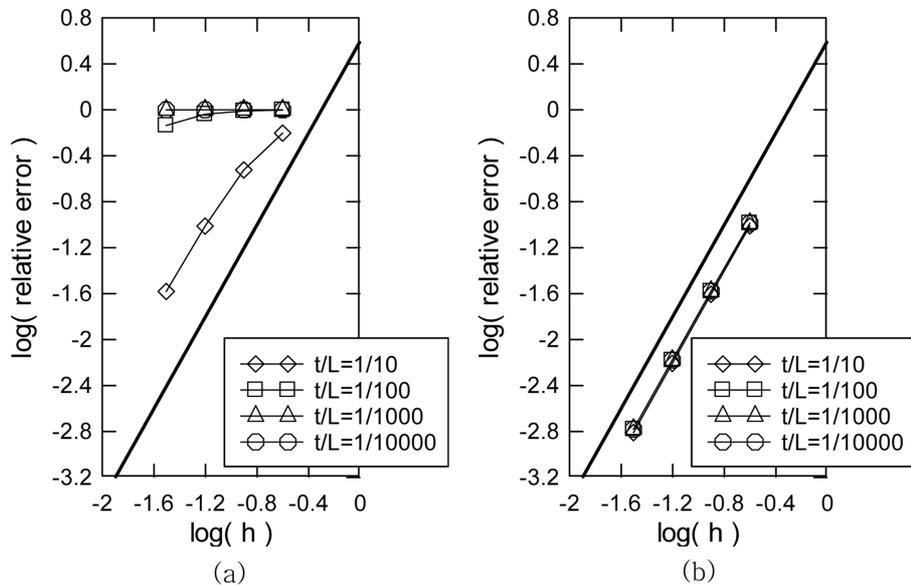


그림 5. 두께의 변화에 따른 4절점 쉘 유한요소들의 수렴곡선: (a) 잠김현상이 일어날 때-QUAD4 쉘 요소 (b) 잠김현상이 일어나지 않을 때-MITC4 쉘 요소

유한요소해의 이론적인 수렴은 다음과 같다.

$$E_h \cong ch^{2k} \quad (44)$$

여기서 c 는 상수, h 는 사용된 유한요소의 크기, k 는 유한요소의 변위 근사함수(displacement interpolation function) 차수이다. 예를 들면 선형(linear) 근사함수를 사용하는 3절점 및 4절점 쉘 유한요소에 대하여 $k=1$ 이며, 2차의(quadratic) 근사함수를 사용하는 6절점 및 9절점 쉘 유한요소에 대하여 $k=2$ 이다. S-norm은 수치적인 방법에 의해 계산될 수 있다(Lee, Noh and Bathe, 2007).

4.3 수렴곡선과 균일최적수렴

다음으로 2개의 휨지배 쉘 구조문제들의 예를 통하여 잠김현상이 s-norm을 이용하여 구해진 수렴곡선에 어떻게 나

타나는지를 보여주고 균일최적수렴(uniform optimal convergence)에 대하여 알아본다.

판(plate) 구조는 곡률이 영인 쉘 구조물로서 쉘 구조의 가장 단순한 형태이다. 첫 번째 예로 그림 4(a)에 보여진 네 변이 완전히 구속된 평판 휨(plate bending) 구조문제에 대하여 쉘 유한요소해의 수렴곡선을 살펴보자. 사용된 탄성계수는 1.7472×10^7 , 포아손비는 0.3, 길이 $L=1.0$, 하중은 단위 면적당 90이 $-Z$ 방향으로 작용한다. 구조물의 형상, 하중, 변위경계조건의 대칭성으로 인해 그림 4(a)의 색칠된 부분만 해석되었다.

주어진 평판 휨 문제를 풀기 위하여 변위법(displacement based formulation)에 의한 4절점 감절점 쉘 유한요소(QUAD4)와 혼합법(mixed formulation)에 의한 4절점 감절점 쉘 유한요소(MITC4³)를 사용하였다(Ahmad, Irons and

³MITC(Mixed Interpolation of Tensorial Components) 방법을 이용하여 개발된 n 절점 쉘 유한요소를 MITC n 유한요소라고 부른다. 즉, MITC4는 4절점, MITC6는 6절점 쉘 유한요소이다.

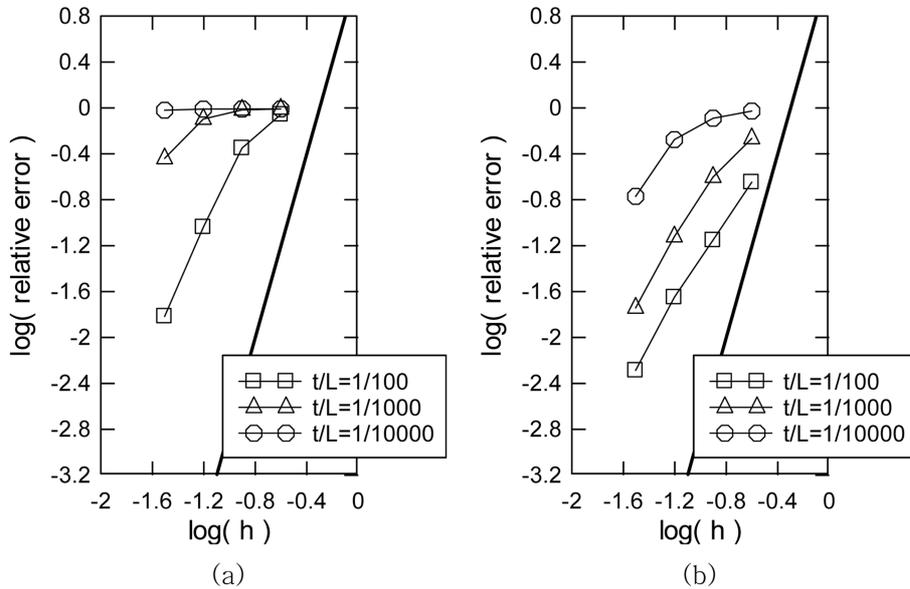


그림 6. 두께의 변화에 따른 6절점 쉘 유한요소들의 수렴곡선: (a) 잠김현상이 일어날 때 - QUAD6 쉘 요소 (b) 잠김현상을 완화시켰을 때 - MITC6 쉘 요소

Zienkiewicz, 1970; Bathe and Dvorkin, 1989; Bathe, 1996). 각각의 경우 두께 변화에 따른 수렴곡선에서 잠김현상이 어떻게 나타나는지를 살펴보자.

그림 5는 두 가지 4절점 쉘 유한요소들에 대하여 쉘 두께의 변화($t/L=1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000$)에 따른 수렴곡선들(convergence curves)을 보여준다. 여기서 h 는 사용된 유한요소의 크기를 나타내며 상대오차를 계산하기 위하여 s-norm을 사용하였다. h 와 상대오차에 log를 취함으로써 식 (44)의 이론적인 수렴률과 구해진 수렴곡선의 수렴률을 비교할 수 있다. 그림 5의 각각의 그래프에 이론적인 수렴곡선의 기울기($2k$)가 두께가 굵은 직선으로 그려져 있다.

그림 5(a)는 잠김현상이 일어날 때의 전형적인 수렴곡선들이다. 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 상대오차(relative error)가 급증하는 것을 알 수 있다. 반면에 그림 5(b)의 수렴곡선들에서는 상대오차가 쉘 두께(t)에 영향을 받지 않고 오직 요소의 크기 h 에만 관계함을 알 수 있다. 또한 그림 5(b)에서는 수렴곡선들이 이론적인 기울기와 같다. 그림 5(b)와 같은 형태의 쉘 유한요소해의 수렴형태를 균일최적수렴(uniform optimal convergence)이라고 한다.

두 번째 예제로 그림 4(b)는 한 변이 구속된 쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid) 쉘 구조문제이다. 쉘의 중심면(midsurface)은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 \end{pmatrix}; (\xi^1, \xi^2) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \quad (45)$$

경계조건은 $X=-0.5$ 인 변을 따라 완전히 구속되며 자중(self-weight)이 $-Z$ 방향으로 작용한다. 구조물의 형상과 변위 및 경계조건이 $Y=0$ 인 면을 따라 대칭이므로 그림 4(b)의 색칠된 부분만 해석되었다. 사용된 탄성계수는 2.0×10^{11} , 포아송비(Poisson's ratio)는 0.3, 길이 $L=1.0$ 이며 자중은 단위면적당 80이다.

주어진 휨지배문제를 풀기 위해 변위법(displacement

based formulation)에 의한 6절점 삼각형 쉘 유한요소(QUAD6)와 혼합법(mixed formulation)에 의한 6절점 삼각형 쉘 유한요소(MITC6)를 사용하였다(Ahmad, Irons and Zienkiewicz, 1970; Bathe, 1996; Lee and Bathe, 2004).

그림 6에서 t/L 이 1/100, 1/1000, 1/10000인 세가지 경우에 대하여 6절점 삼각형 쉘 유한요소들의 수렴곡선들(convergence curves)을 보여준다. 각각의 그래프에 이론적인 수렴곡선의 기울기($2k$)가 두께가 굵은 직선으로 그려져 있다. 그림 6(a)는 QUAD6 유한요소가 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 계산된 해의 오차가 늘어나는 경향, 즉, 잠김현상을 유발한다는 것을 보여준다. 그림 6(b)에서는 MITC6 유한요소를 사용했을 때 잠김현상이 완전히 제거되는 않으나 QUAD6 유한요소에 비하여 상당히 완화되었음을 나타낸다.

여기서 우리는 두 가지 쉘 구조문제들을 대상으로 쉘 유한요소해의 수렴곡선과 잠김현상에 대하여 알아보았다. 중요한 점은 어떤 쉘 유한요소가 몇 가지 쉘 구조문제들에 대하여 잠김현상을 일으키지 않는다고 해서 다른 쉘 구조문제들에 대하여도 잠김현상을 유발시키지 않는다고 말할 수 없다는 것이다. 즉, 몇 가지 쉘 구조문제들에 대하여 균일최적수렴을 보이며 잠김현상을 일으키지 않는 유한요소도 다른 쉘 구조문제들에 대해서 잠김현상을 보일 수 있으며 모든 쉘 구조문제들에 대하여 잠김현상을 일으키지 않는 쉘 유한요소를 개발하는 것은 극히 어렵다. 보다 다양한 쉘 구조문제들에 대한 유한요소해의 수렴곡선에 대한 예는 참고문헌에 나와있는 Lee와 Bathe의 논문들에서 찾을 수 있다.

쉘 유한요소의 잠김현상을 알아보기 위해서는 다양한 형상을 가진 휨 및 혼합지배 쉘 구조문제에 대하여 그림 5와 6에 보여진 것과 같이 쉘의 두께를 변화시키며 수렴을 시험하여야 한다. 또한 특정 쉘 요소가 휨지배문제에 좋은 거동을 보인다고 해서 막지배문제에 대해서도 좋은 거동을 보이는 것은 아니다. 결론적으로 다양한 형상의 쉘 구조문제들을 고려하여 휨과 막지배라는 두 가지 양단의 거동에서 이상적인 수렴을 보이는 쉘 유한요소가 가장 바람직하고 이런 쉘 유한요소는 혼합지배 쉘 구조문제에 대하여도 좋은 거동을

보일 것이다. 즉, 이상적인 쉘 유한요소는 여러 가지 접근적인 거동을 보이는 다양한 형상의 쉘 구조문제들에 대하여 균일최적수렴을 보여 주어야 한다.

5. 쉘 유한요소의 성능평가에 대하여

나날이 쉘 수 없을 만큼 많은 쉘 유한요소들이 개발되고 있지만 쉘 유한요소의 성능평가는 아직도 고전적인 방법을 통하여 이루어지고 있다. 본 장에서는 이상적인 쉘 유한요소의 조건과 잠김현상을 완화시키는 방법들을 정리하고 쉘 유한요소의 성능평가를 위한 방법론을 제시한다.

5.1 이상적인 쉘 유한요소

유한요소 구조해석 문제는 다음과 같은 변분식(variational form)으로 나타내어질 수 있다.

Find $\vec{U}_h \in \vec{\Psi}_h$ such that

$$A_h(\vec{U}_h, \vec{V}_h) = \vec{F}(\vec{V}_h), \forall \vec{V}_h \in \vec{\Psi}_h, \quad (46)$$

여기서 $A_h(\cdot, \cdot)$ 는 유한요소법으로 이산화(discretization)된 곱선형식(bilinear form)이고 $\vec{\Psi}_h$ 는 유한요소 변위장의 Sobolev 공간(space)이다. 물론 $\vec{\Psi}_h \subset \vec{\Psi}$ 이 성립한다.

$$A_h(\vec{U}_h, \vec{V}_h) = \vec{V}_h^T \left(\int_{\Omega_h} \mathbf{B}_h^T \mathbf{C}_h \mathbf{B}_h d\Omega_h \right) \vec{U}_h \quad (47)$$

여기서 \vec{U}_h 는 유한요소해(finite element solution), \vec{V}_h 는 유한요소 시험함수, $\vec{\Psi}_h$ 는 유한요소 변위장의 공간, $\vec{F}(\cdot)$ 는 외력을 나타내는 선형식(linear form)이다. 쉘 유한요소해 식일 경우 식 (46)은 식 (26)의 형태로 표현될 수 있다.

일반적인 쉘 구조물의 효과적인 유한요소해석에 쓰일 수 있는 이상적인 쉘 유한요소의 개발은 매우 어려운 일이다. 이상적인 쉘 유한요소의 조건을 다음과 같이 정리할 수 있다.

- 첫째, 쉘 유한요소는 거짓영에너지모드(spurious zero energy mode)를 갖지 말아야 한다. 변위경계조건이 주어지지 않은 임의의 형상을 갖는 개개의 쉘 유한요소는 물리적인 강제운동에 대응하는 6개의 영에너지모드(zero energy mode)만을 가져야 한다. 이 조건을 ellipticity(타원율)라 하며 다음과 같이 정의된다.

$$\exists \alpha > 0 \text{ such that } \forall \vec{U}_h \in \vec{\Psi}_h, A_h(\vec{U}_h, \vec{U}_h) \geq \alpha \|\vec{U}_h\|^2 \quad (48)$$

여기서 α 는 상수이며 $\|\cdot\|_1$ 는 1차 Sobolev norm⁴이다.

이 조건은 쉘 유한요소 강성행렬(stiffness matrix)의 고유치들(eigenvalues) 중 0인 개수와 그에 대응하는 고유벡터들(eigenvectors)을 살펴봄으로써 시험될 수 있다. 탄성체는 강제운동이 아닌 변위에 대하여 변형에너지를 저장한다. 식 (48)의 조건을 만족시키지 못하는 유한요소는 강제운동이 아닌 변위에 대하여 변형에너지를 저장할 수 없으며 이는 물리적으로 적합하지 못하다.

- 둘째, 쉘 유한요소는 쉘 수학모델에 근거하였기 때문에 쉘

유한요소해석의 해는 주어진 쉘 구조문제에 대하여 사용된 요소의 크기(h)가 줄어들에 따라 또는 사용된 요소의 수가 증가함에 따라 쉘 수학모델의 정확도에 수렴해야 한다. 이 조건을 consistency(무모순성 또는 정합성)라 부르며 다음과 같이 정의된다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{U}_h = \vec{U} \text{ or } \lim_{h \rightarrow 0} A_h(\vec{U}_h, \vec{U}_h) = A(\vec{U}, \vec{U}) \quad (49)$$

여기서 $A_h(\cdot, \cdot)$ 는 쉘 수학모델의 정확한 곱선형식(exact bilinear form)이며 \vec{U} 는 정확해(exact solution)이다.

이 조건이 만족되지 않을 경우 쉘 유한요소의 해는 이론 해에 수렴하지 못 하므로 신뢰할 만한 결과를 줄 수 없다.

- 셋째, 쉘 유한요소는 모든 종류의 휨 및 혼합지배 쉘 구조 문제에 대하여 균일최적수렴(uniform optimal convergence)을 보여야 한다. 이 조건을 만족시키는 쉘 유한요소는 비로소 쉘의 두께와 상관 없이 전단잠김과 막잠김으로부터 자유로운 유한요소가 된다. 이는 본 논문의 4장에서 설명된 방법에 의해 시험될 수 있다. 혼합법에 의해 정식화(mixed formulation)된 쉘 유한요소에 대하여 이 조건을 “inf-sup condition”이라 부른다(Bathe, 1996; Bathe, Iosilevich and Chapelle, 2000b).

위에서 언급된 세가지 조건을 모두 만족하는 이상적이 쉘 유한요소를 개발하는 것은 극히 어렵다. 실용적인 쉘 유한요소해석에서는 보다 완화된 다음의 조건들을 만족시키는 쉘 요소의 사용이 권장된다(Lee and Bathe, 2004).

- 거짓영에너지모드(spurious zero energy mode) 없음 (ellipticity조건 만족)
- Consistency조건 만족
- 판 문제의 해석에 있어서 전단잠김 없음
- 막지배거동 쉘 구조물에 대하여 균일최적수렴
- 휨 및 혼합지배거동 쉘 구조물에 대하여 실용적인 t/L 의 범위(1/10~1/10000)에서 신뢰할 수 있는 결과
- 비선형 해석에 있어서 효율적인 정식화

5.2 잠김현상의 제어

지난 수십 년 동안 쉘 유한요소의 잠김현상을 제어하기 위해 많은 방법들이 고안되어왔다. 그 방법들은 크게 세가지로 나누어질 수 있다.

- 식 (47)의 변형률-변위 관계 연산자 \mathbf{B}_h 를 변형하여 전단 및 막 변형률장의 차수를 줄여주는 방법, (예) reduced integration, ANS method, MITC method
 - 식 (47)의 \mathbf{B}_h 에 새로운 항을 추가하여 전단 및 막 변형률장의 공간(space)을 늘려주는 방법, (예) EAS method
 - 식 (46)에서 유한요소 변위장 \vec{U}_h 의 공간($\vec{\Psi}_h$)을 늘려주는 방법, (예) non-conforming method
- 쉘 유한요소의 잠김현상을 완화시키기 위한 대부분의 방법들은 위의 세 분류들(categories)에 속하며 세 방법들을 복합적으로 이용한 예들도 있다.

가장 쉬운 방법은 감차적분(reduced integration)을 사용하

⁴1차 Sobolev norm의 제곱은 다음과 같이 정의된다(Bathe, 1996).

$$\|\mathbf{v}\|_1^2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (v_i)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega$$

는 방법이다(Bathe, 1996). 그러나 이 방법은 거짓영에너지 모드(spurious zero energy mode)를 유발시키는 치명적인 단점을 지니고 있다. 이점을 극복하기 위하여 각종 안정화(stabilization)기법이 사용된다.

비적합모드(non-conforming or incompatible mode)를 추가함으로써 요소의 휨 모드를 복원하여 셀 유한요소의 잠김 현상을 완화할 수 있다. 이 방법은 요소간 변위의 적합성(inter-elemental compatibility)을 만족시키지 못하는 단점과 최종 강성행렬을 구하기 위해 정적응축(static condensation)을 사용하기 때문에 비선형 해석으로 확장 시 식이 복잡해지는 단점을 가지고 있다(Choi, Lee and Park, 1999; 최창근, 2002).

변위와 변형률을 각각 따로 근사하는 혼합법(mixed formulation)에 근거한 방법들은 셀 유한요소의 잠김현상을 완화시키는 알려진 방법들 중 가장 우수하다고 평가된다. 그 중 MITC(Mixed Interpolation of Tensorial Components) 방법은 이론적으로 잘 확립되어 있으며 다양한 수치실험으로 잠김현상의 제어에 매우 효과적임이 입증되었다(Bathe and Dvorkin, 1989; Bathe, 1996; Bathe, Iosilevich and Chapelle, 2000a; Hiller and Bathe, 2003). 최근의 연구들은 MITC방법에 의해 만들어진 사각형 셀 유한요소들이 이상적인 셀 유한요소에 상당히 접근해 있음을 보여준다(Hiller and Bathe, 2003; Bathe, Lee and Hiller, 2003).

MITC 방법에서는 변위법에 근거한 셀 유한요소의 특정한 위치들(tying points)에서 공변변형률들(covariant strains)을 이용하여 원래 공변(covariant)변형률의 근사치수보다 낮은 차수로 변형률장을 근사(interpolation)한다. 일반적으로 근사함수는 낮은 차수일수록 잠김현상 제어에 더 효과적이지만 너무 낮은 근사치수는 막지배거동을 하는 셀 구조문제를 풀 때 유한요소해가 이론해에 수렴하지 못하는(즉, consistency 조건을 만족시키지 못하는) 현상을 유발시킨다. 심한 경우에는 거짓영에너지모드를 발생시켜 ellipticity조건까지 만족시킬 수 없게 만든다. 그러므로 MITC방법의 핵심은 휨 및 혼합지배거동 시 잠김현상을 줄여주면서 막지배거동 시 수렴성을 유지하는(즉, consistency를 만족시키는) 균형 잡힌 변형률의 근사장을 찾아내는 것이다.

대체변형률장(assumed strain field)을 사용하는 ANS (Assumed Natural Strain)방법은 MITC방법과 유사하며, EAS(Extended Assumed Strain)방법은 ANS 또는 MITC방법에 추가적인 변형률장을 도입하여 변형률장이 표현 가능한 형태들(patterns)의 수를 늘려주는 방법이다. EAS방법은 비적합모드를 사용하는 방법과 비슷하게 추가된 변형률장의 자유도를 제거하기 위해 정적응축을 필요로 한다는 단점을

가지고 있으며 기존의 ANS나 MITC방법에 비하여 셀 유한요소의 수렴성을 개선시킬 수 있지만 그 효과가 크지는 않다고 알려져 있다.

다른 여러 가지 방법을 사용하여 휨 및 혼합지배거동 셀 구조문제에 대하여 보다 유연(flexible)한 거동을 하는 셀 유한요소를 개발하는 것은 어렵지 않다. 그러나 그와 동시에 consistency와 ellipticity조건들을 모두 만족시키는 것은 쉽지 않다. 앞으로 여러 종류의 개발된 셀 유한요소에 대하여 셀 이론에 바탕을 둔 심도 있는 성능시험(benchmark test)과 연구가 필요하다.

5.3 셀 유한요소의 성능평가

일반적으로 유한요소법을 사용하여 셀 구조물을 해석하는 대부분의 기술자들(engineers)은 구하여진 해의 오차(error)에 대한 평가 없이 해석결과를 받아들이기 때문에 셀 유한요소를 개발하는 연구자들은 개발된 셀 유한요소를 실제 해석에 사용하기에 앞서 성능을 평가하고 그 결과를 보고하여야 한다. 개발된 셀 유한요소의 오차특성이 명확하게 알려진다면 사용자들은 주어진 셀 유한요소를 어떻게 올바르게 사용할 수 있을지를 판단할 수 있게 된다. 셀 유한요소의 성능평가는 다음에 열거된 사항들을 고려하여 이루어져야 한다.

- 기본시험
셀 유한요소는 표 2에 정리되어있는 기본시험들(basic tests)을 통과하여야 한다. 기본시험들을 통과하지 못하는 셀 유한요소의 사용은 바람직하지 못하다.

- 성능평가방법
셀 유한요소의 성능을 평가하기 위해서는 다양한 셀 구조 문제들이 사용되어야 한다. 셀 유한요소들의 성능을 비교평가하기 위하여 오래 전부터 많은 셀 해석문제들이 제안되어 왔다. 현재까지 가장 널리 쓰이는 성능평가방법은 1985년에 MacNeal와 Harder에 의해 정리된 것으로 두께가 정해진 몇 가지 셀 구조문제들을 해석하여 정해진 위치에서 구해진 변위 및 응력/변형률 등의 결과치들을 유한요소망을 조밀화 하면서 비교하는 것이다. 이미 언급한 바와 같이 몇몇 점들에서의 해의 수렴을 측정하는 것은 전체 유한요소해의 거동을 올바르게 반영할 수 없다. 변위형상이나 응력/변형률의 분포는 유한요소해의 전체적인 수렴정도를 보여줄 수 있으며 이것들을 비교하는 것은 매우 좋은 보완방법이다. 그러나 이 방법으로 과연 유한요소해가 어느 정도 수렴했는지를 측정하여 그 정도를 한 개의 값으로 보여주는 것은 대단히 어렵다. 그러므로, 응력과 변형률의 오차분포로부터 구해진 s-norm은 전체 유한요소해를 반영하는 좋은 오차측정의 기준이 된다. 또한 4.3절에서 설명한 바와 같이 두께의 변화를 고려한 성

표 2. 셀 유한요소의 기본시험

시험	대상	참고문헌
영에너지 시험 (Zero energy mode test)	사각형 셀 유한요소 삼각형 셀 유한요소	Bathe, 1996
조각 시험 (Patch tests) - Membrane patch test - Bending patch test	사각형 셀 유한요소 삼각형 셀 유한요소	Bathe, 1996 Lee and Bathe, 2004
요소 등방성 시험 (Element isotropy test)	삼각형 셀 유한요소	Lee and Bathe, 2004

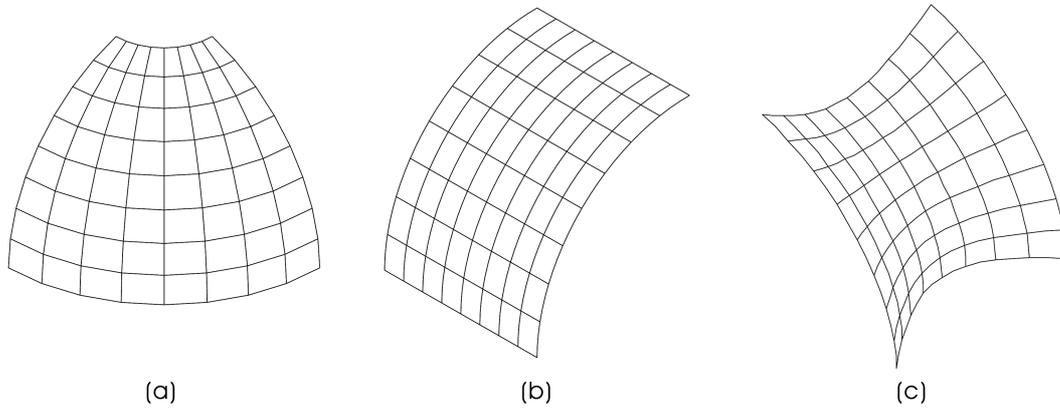


그림 7. Gaussian곡률에 따른 곡면의 종류: (a) Positive Gaussian curvature, (b) Zero Gaussian curvature, (c) Negative Gaussian curvature

표 3. 쉘 유한요소의 성능평가를 위한 쉘 구조문제의 예들(Bathe, Iosilevich and Chapelle, 2000; Lee and Bathe, 2002; Bathe, Chapelle and Lee, 2003; Bathe, Lee and Hiller, 2003; Chapelle and Bathe, 2003; Hiller and Bathe, 2003; Lee and Bathe, 2004; Lee and Bathe, 2005; Lee, Noh and Bathe, 2007)

쉘 구조문제 (shell problems)	Gaussian 곡률	접근거동 (ρ)
Fully clamped plate problem	Zero	휨지배 ($\rho = 3.0$)
Scodelis-Lo roof shell problem	Zero	혼합지배 ($\rho = 1.75$)
Modified Scodelis-Lo roof shell problem	Zero	막지배 ($\rho = 1.0$)
Free cylindrical shell problem	Zero	휨지배 ($\rho = 3.0$)
Fixed cylindrical shell problem	Zero	막지배 ($\rho = 1.0$)
Clamped hemispherical cap problem	Positive	막지배 ($\rho = 1.0$)
Monster shell problem	Positive	Not well-defined
Partly clamped hyperbolic paraboloid shell problem	Negative	휨지배 ($\rho = 3.0$)
Free hyperboloid shell problem	Negative	휨지배 ($\rho = 3.0$)
Fixed hyperboloid shell problem	Negative	막지배 ($\rho = 1.0$)

능평가방법을 사용하는 것이 바람직하다.

• 층(layer)

쉘의 응력/변형률/변위장들이 급격히 변하는 층(layer)의 폭, 즉, 특성길이(characteristic length)는 쉘의 두께에 따라 변화한다. 일반적으로 특성길이는 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 식 (33)에 의하여 급격히 줄어든다. 층에서의 에너지 집중현상 때문에 이런 층이 발생하는 쉘 구조문제를 풀 때는 균일한 유한요소망을 사용하여 균일최적수렴을 얻기 힘들다. 각각 층의 특성길이를 반영한 유한요소망을 사용하여야 한다. 즉, 층이 발생하는 영역에서 보다 조밀한 유한요소망의 사용이 요구된다(Bathe, Iosilevich and Chapelle, 2000a). 이러한 유한요소망을 “graded mesh”라 부른다.

• 중심면의 곡률

쉘 구조물의 중심면은 곡률(curvature)을 가지고 있다. 곡면은 Gaussian곡률의 부호에 따라 세가지로 나누어질 수 있다. 특히 Gaussian곡률이 음인 곡면을 가지는 쉘 구조물은 유한요소해석에 있어서 상당한 어려움이 뒤따른다(Lee and Bathe 2004). 쉘 유한요소의 성능을 평가하기 위한 해석시험문제들(benchmark test set)은 다양한 곡률을 고려하여 구성되어야 한다. 이는 어떤 쉘 유한요소가 특정한 곡률을 가지는 쉘 구조문제에서 좋은 수렴성을 보인다고 하여 다른 곡률을 가지는 구조문제에 대하여도 좋은 수렴을 보이는 것은 아니기 때문이다. 그림 7은 Gaussian곡률에 따른 곡면의 예들을 보여주고 있다.

• 접근거동의 종류

3장에서 우리는 쉘 구조물의 두께가 얇아짐에 따라 나타나

는 3가지 접근거동(휨지배, 막지배, 혼합지배거동)을 살펴 보았다. 각각의 접근거동을 모두 시험할 수 있도록 해석시험문제들을 구성해 주어야 한다. 특히, 휨지배 및 혼합지배거동 쉘 구조문제들에서는 잠김현상이 일어나는지를 시험하여야 하며 막지배거동 쉘 구조문제들에서는 5.1절에서 언급한 consistency조건이 만족되는지를 살펴보아야 한다. 표 3은 쉘 유한요소의 성능평가를 위한 쉘 구조문제의 예들을 보여주고 있다.

• 요소망(mesh)의 형태

유한요소해석의 해는 유한요소망을 어떻게 구성하는지에 따라 그 수렴특성이 변화하게 된다. 요소형상의 찌그러짐에 민감하지 않고 좋은 수렴성을 유지하는 쉘 유한요소를 개발하는 것은 쉽지 않은 일이다. 따라서 해석시험문제들은 다양한 유한요소망에 따른 쉘 유한요소의 수렴특성을 반영해 주어야 한다. 특히, 비등방성(non-isotropic) 삼각형 쉘 유한요소의 시험에서는 유한요소망의 형태뿐만 아니라 요소의 방향에 따라 수렴특성이 변하므로 요소의 방향성 또한 고려되어야 한다(Lee, Noh and Bathe, 2007).

6. 결 론

머리말에서 언급된 바와 같이 쉘 구조물의 유한요소해석을 명확하게 이해하기 위해서는 쉘 구조물의 물리적 거동, 수학 모델 및 쉘 유한요소해석에 대한 이해가 동시에 체계적이고 심도 있게 이루어져야 한다. 본 논문에서는 이 세가지 부분에 대한 이해와 이들이 서로 어떻게 유기적으로 관계를 맺

고 있는지를 최근 주요 연구들을 토대로 정리하여 고찰하였고 이상적인 쉘 유한요소의 성질과 쉘 유한요소의 성능평가 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 대표적인 쉘 수학적모델과 휨지배거동, 막지배거동, 혼합지배거동 등으로 나누어지는 쉘 구조물의 점근 거동에 대한 기본적인 이론과 그 점근거동을 수치적으로 알아내는 방법을 알아보았다. 또한 휨지배 및 혼합지배거동에서 나타나는 쉘 유한요소의 잠김현상을 두께의 변화에 따른 수렴곡선을 통하여 고찰하였다. 마지막으로 이상적인 쉘 유한요소의 조건과 잠김현상의 제어하는 방법을 알아보았고 쉘 유한요소의 성능평가방법을 제안하였다.

쉘 구조물의 수학적모델과 점근거동은 쉘의 물리적 거동을 이해하는데 핵심사항으로 쉘 구조물을 설계하는 기술자나 쉘 유한요소해석을 연구하는 연구자들이 명확하게 알아야 할 매우 중요한 부분이다. 유한요소법을 이용하여 쉘 구조물을 해석하기에 앞서 쉘 구조물의 점근거동과 그와 관련된 쉘 유한요소의 잠김현상에 대한 이해는 필수적이다. 통합적인 이해의 바탕이 있을 때 신뢰할 만한 쉘 유한요소의 개발이 이루어질 수 있으며 쉘 구조물의 유한요소해석을 통하여 얻어진 결과를 정확하게 이해할 수 있다.

감사의 글

글을 맺으며 본 논문에 소개된 기본개념들을 정립하고 정리하는데 많은 가르침을 주신 MIT(Massachusetts Institute of Technology)의 Klaus-Jürgen Bathe 교수님과 KAIST(한국과학기술원)의 최창근 교수님께 깊은 감사드립니다.

참고문헌

최창근 (2002) *유한요소법*. 테크노프레스.

Ahmad, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C. (1970) Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, Vol. 2, pp. 419-451.

Bathe, K.J. (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall: New Jersey.

Bathe, K.J., Chapelle, D., and Lee, P.S. (2003) A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, Vol. 57, pp. 1039-1052.

Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N. (1989) A formulation of general

shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, Vol. 22, pp. 697-722.

Bathe, K.J., Iosilevich, A., and Chapelle, D. (2000a) An evaluation of the MITC shell elements. *Computers & Structures*, Vol. 75, pp. 1-30.

Bathe, K.J., Iosilevich, A., and Chapelle, D. (2000b) An inf-sup test for shell finite elements. *Computers & Structures*, Vol. 75, pp. 439-456.

Bathe, K.J., Lee, P.S., and Hiller, J.F. (2003) Towards improving the MITC9 shell element. *Computers & Structures*, Vol. 81, pp. 477-489.

Chapelle, D. and Bathe, K.J. (1998) Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers & Structures*, Vol. 66, pp. 19-36, pp. 711-712.

Chapelle, D. and Bathe, K.J. (2003) *The finite element analysis of shells? fundamentals*. Berlin:Springer-Verlag.

Choi, C.K., Lee, P.S., and Park, Y.M. (1999) Defect-free 4-node flat shell element: NMS-4F element. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 8, pp. 207-231.

Hiller, J.F. and Bathe, K.J. (2003) Measuring convergence of mixed finite element discretizations: an application to shell structures. *Computers & Structures*, Vol. 81, pp. 639-654.

Lee, P.S. and Bathe, K.J. (2002) On the asymptotic behavior of shell structures and the evaluation in finite element solutions. *Computers & Structures*, Vol. 80, pp. 235-255.

Lee, P.S. and Bathe, K.J. (2004) Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 945-962.

Lee, P.S. and Bathe, K.J. (2005) Insight into finite element shell discretizations by use of the basic shell mathematical model. *Computers & Structures*, Vol. 83, pp. 69-90.

Lee, P.S. Noh, H.C., and Bathe, K.J. (2007) Insight into 3-node triangular shell finite elements: the effects of element isotropy and mesh patterns. *Computers & Structures*, Vol. 85, pp. 404-418.

Lovadina, C. (2001) Energy estimates for linear elastic shells. *Computational Fluid and Solid Mechanics (Bathe KJ ed.)*, pp. 330-331, Elsevier Science.

MacNeal, R.H. and Harder, R.L. (1985) A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 1, pp. 3-20.

Noh, H.C. (2006) Nonlinear behavior and ultimate load bearing capacity of reinforced concrete natural draught cooling tower shell. *Engineering Structures*, Vol. 28, pp. 399-410.

(접수일: 2006.7.18/심사일: 2007.1.16/심사완료일: 2007.3.27)