大 韓 土 木 學 會 論 文 集
第26卷 第6A號 · 2006年 11月
pp. 1001 ~ 1011

확률변수상태와 응답변화도

Random Variable State and Response Variability

노혁천* · 이필승**
Noh, Hyuk-Chun · Lee, Phill-Seung

Abstract

It is a general agreement that exact statistical solutions can be found by a Monte Carlo technique. Due to difficulties, however, in the numerical generation of random fields, which satisfy not only the probabilistic distribution but the spectral characteristics as well, it is recognized as relatively difficult to find an exact response variability of a structural response. In this study, recognizing that the random field assumes a constant over the domain under consideration when the correlation distance tends to infinity, a semi-theoretical solution of response variability is proposed for general structures. In this procedure, the probability density function is directly used. It is particularly noteworthy that the proposed methodology provides response variability for virtually any type of probability density function, and has capability of considering correlations between multiple random variables.
Keywords : *probability density function, stochastic FEM, random variable state*

요 지

재료인수, 기하인수 또는 작용하중 등에 불확실성을 가지는 구조에 대한 추계론적 해석의 정확해는, 일반적인 관점에서, 불확실성을 표현하는 추계장의 수치생성과 이에 대한 몬테카를로 해석을 통하여 얻을 수 있다. 그러나 불확실 인수의 공간적 분포를 나타내는 추계장은 그 특성을 표현해주는 두 가지의 함수를 동시에 만족시켜야 한다. 하나는 확률변수의 공간적 분포 상황을 표현해주는 스펙트럼밀도함수이며, 다른 하나는 통계적 특성을 나타내는 확률밀도함수이다. 일반적으로 이들 두 함수를 동시에 만족시키는 추계장의 정확한 수치생성은 여러 이유에서 어려운 일로 여겨지고 있다. 그러나 상관관계거리가 무한대인 확률변수상태의 경우 추계장은 상수추계장이 되며, 이 경우 스펙트럼밀도함수에 의하여 부과되는 제한조건은 사라지게 되어, 단순히 확률밀도함수에 대한 조건만이 남게 된다. 이 경우, 구조인수의 불확실성에 의한 구조응답은 확률밀도함수만을 고려하여 얻을 수 있게 된다. 이렇게 산정되는 응답변화도는 기존의 급수전개 및 섭동법 등의 수치해법은 물론 몬테카를로 해석에서도 얻을 수 없었던 정확해에 대한 준이론해를 제공해 줄 수 있다.
핵심용어 : 확률밀도함수, 추계론적 유한요소해석, 확률변수상태

1. 서 론

구조계의 불확실성에 대한 수치적 고려의 관점에서 분류할 수 있는 불확실성으로는 내재적(intrinsic) 불확실성, 측정(measurement) 불확실성, 통계(statistical) 불확실성 및 수학모델(mathematical model)의 불확실성 등을 들 수 있다(JCSS 2001). 측정상의 불확실성은 실험을 통하여 불확실인수를 확립하는 과정에서 개재되는 불확실성을 의미하며, 통계불확실성은 얻어진 정보들이 시간적 및 공간적으로 제한되어 있음에 의하여 나타나는 자료부족에 의한 불확실성을, 그리고 수학모델의 불확실성은 불확실인수의 실제적 형태와 이를 모사하는 수학적 모델링 사이의 상이함에 의하여 나타나는 불확실성을 의미한다. 기술된 불확실 요인들은 실제로 구조의 불확실거동 및 신뢰도해석 등에서 모두 고려되는 것이 바람직하나, 추계론적 유한요소해석은 가장 영향도가 크다고 할 수 있는 내재적 불확실성에 대한 해석을 주로 다루고 있다. 내재적 불확실성은 구조 재료, 구조의 형상을 표현하는 기하인수 그리고 작용하중 등에 나타나는 불확실성을 의미하며 구조 인수의 자연적 특성중의 하나라고 할 수 있다(Choi and Noh 1996; Noh 2004).

추계론적 유한요소해석(stochastic finite element method: SFEM)은 추계론적 해석과 유한요소법을 조합한 해석법으로서 구조계 인수들에 나타나는 불확실성을 해석에 고려하여, 이에 따른 구조의 불확실 응답을 확률적으로 제시하는 것을 목적으로 한다. 통계학적 방법(statistical method)의 대표격인 몬테카를로 해석법(Monte Carlo simulation: MCS)은 개념적 단순성에 의하여 거의 모든 추계론적 문제에 대한 해를 제공해 주는 장점이 있으나, 효율성과 정확성이 높은 추계장

*정회원 · 한국콘크리트학회 부설 콘크리트공학연구소 선임연구원(E-mail : cpebach@kaist.ac.kr)
**정회원 · 삼성중공업(주) 건설부문 과장(E-mail : phillseung@gmail.com)

(stochastic field) 생성 알고리즘이 요구되고 해석에 많은 시간과 노력이 필요하다는 단점도 가지고 있다. 반면, 급수전개법, 섭동법 등을 포함하는 비통계학적 근사해법은 주 변수에 대하여 주로 1차 급수전개 또는 최대 2차 급수전개에 기초하므로 추계장의 변동계수(coefficient of variation: COV)가 낮은 경우에만 적용이 가능하며, 추계장의 변동계수가 클 경우, 정확해는 물론, 몬테카를로 해석법과도 많은 차이를 나타내게 된다(Micaletti 2000; Noh 2005).

불확실인수의 공간적 불확실분포는 보통 추계장함수(stochastic field function) $f(\mathbf{x})$로 표현되며, 구조 영역 Ω_{str}에 속한 임의점 $\mathbf{x}_i \in \Omega_{str}$ 에서의 추계장 $f(\mathbf{x}_i)$는 확률밀도함수를 만족해야 하며, 동시에, 불확실인수가 구조 영역에 존재하는 양상을 나타내는 스펙트럼밀도함수(또는 자기상관함수)를 만족하여야 한다(Deodatis and Micaletti 2001). 따라서, 정규분포는 물론 비정규분포하는 확률변수에 대한 정확한 추계장 수치생성은 고난위도의 작업이라고 할 수 있다. 추계장이 확률밀도함수와 스펙트럼특성을 동시에 만족해야 한다는 조건은 추계장이 특정한 확률 특성치(예: 평균, 표준편차 등)를 가진다고 하여도 그 형태는 다양하게 존재할 수 있다는 의미를 내포한다. 즉, 동일한 평균, 표준편차 등을 가지는 추계장이라고 하더라도 추계장의 실제적 형태는 매우 다를 수 있다는 것이다. 이는 추계장의 확률적 특성이 추계장 평면에 대하여 직각인 방향으로의 통계특성인 앙상블(ensemble)개념에 기반하기 때문이다. 일반적으로 추계장은 등질성(homogeneity)으로 가정되며, 따라서, 앙상블에 의한 k차-모멘트 $\mu_i^{(k)}$ 는 구조계 내의 임의 점에서 동일한 것으로 가정된다.

$$\mu_i^{(k)} = \mu_j^{(k)}, \ \ \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \Omega_{str} \tag{1}$$

등질성 추계장의 평면상에서의 분포 특성은 상관관계거리로 결정되는데, 상관관계거리 b는 $b \in [0, \infty]$ 의 영역에 속한다. 상관관계거리의 관점에서 볼 경우, 추계장은 두 가지의 극한 상태를 가질 수 있다: $f(\mathbf{x}; b=0)$, $f(\mathbf{x}; b=\infty)$. 전자의 경우, 추계장은 백색잡음장(white noise field) 형태로 나타나며 이론적으로 가능한 모든 스펙트럼을 포함한다. 후자의 경우 추계장은 하나는 값을 가지는 상수추계장의 형태가 되며, 이를 확률변수상태(random variable state)라고 칭한다(Deodatis *et al*. 2003). 전자에 비교하면 후자는 단일색장(single-colored field)으로 표현할 수 있으며, 양 극의 중간에 존재하는 장들은 일반적인 혼합유색장(mixed-color field)라고 표현할 수 있을 것이다.

추계론적 해석에 대한 여러 연구에서 제시된 바와 같이, 백색잡음장의 경우 변위에 대한 응답변화도는 0의 값으로 나타나고 있다(노혁천 2004, 2005; Deodatis *et al*. 2003; Noh 2006). 중요성이 있다고 여겨지는 부분은 확률변수상태(b=∞)로서, 이 경우 구조의 응답변화도는 구조형식, 고려중인 자유도, 추계장의 확률적 특성 등에 따라 특정의 값을 나타낸다. 변위에 대한 1차 급수전개에 기초한 근사해법의 경우 확률변수상태에 대한 응답변화도는 해석에 고려중인 추계장의 분산계수와 동일한 것으로 산정되는데, 그 이유는 근사해법이 추계장을 1차 함수로 모사하기 때문이다. 그러나, 이렇게 산정된 값은 응답변화도의 이론해와는 많은 차이를 나타내며, 추계장의 변동계수가 커질수록 그 차이는 더욱 증가하는 경향을 보인다. 몬테카를로 해석의 경우 근사해법보다는 좋은 결과를 나타내지만, 그 결과가 추계장의 수치생성에 기초한다는 근본적인 문제로 인하여 응답변화도는 다소간의 변동이 나타나게 되며(Noh 2005; Yamazaki *et al*. 1998), 따라서, 이 방법에서도 이론해는 단순히 근사적으로만 산정된다고 할 수 있다.

최근의 연구에 따르면 해석/설계 인수의 확률적 분포가 정규분포(Gaussian distribution) 외에 특정의 분포를 가지거나 또는 단순히 비정규분포(non-Gaussian distribution)하는 것으로 가정되고 있으며, 따라서, 단순 정규분포 가정은 많은 한계를 가짐을 알 수 있다(Deodatis and Micaletti 2001). 이러한 한계는 근사해법에만 국한되는 것은 아니며, 몬테카를로해석의 경우에도 정규분포 외의 확률분포를 가지는 불확실인수를 고려한 해석은 많은 한계를 가지고 있다. 이들 한계는 근사해법의 경우 확률밀도함수를 고려하는 방법에, 그리고 몬테카를로해석의 경우 비정규 확률변수에 대한 수치생성의 어려움과 과대한 해석시간에 기인한다.

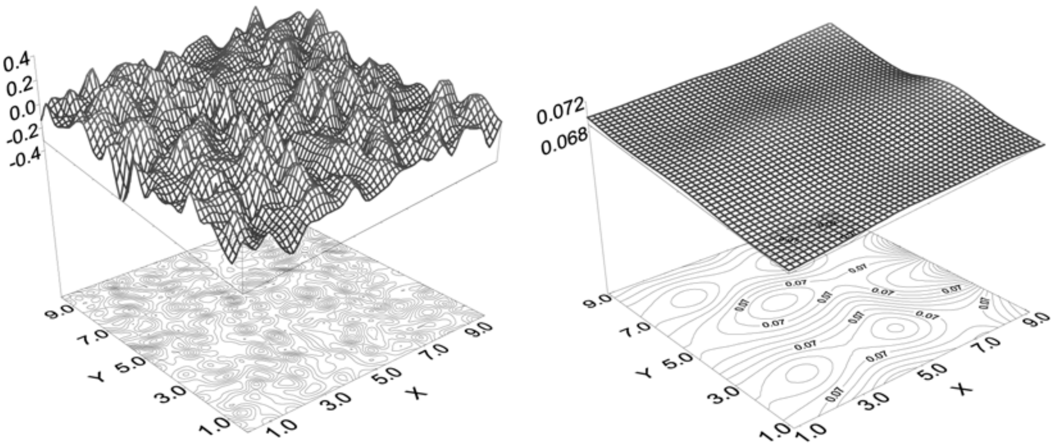
전술한 바와 같이, 확률변수의 확률분포특성과는 관계없이, 백색잡음장(b=∞)과 확률변수상태(b=0)에서의 응답변화도는 해석/설계인수의 추계성에 따른 구조의 확률론적거동의 양극한값을 제공한다. 전자의 경우 응답변화도는 0의 값을 나타내어 상대적 중요도가 적다고 할 수 있는 반면, 후자의 경우에는 그 정확한 값이 일반적으로 알려져 있지 않음은 물론, 나아가 일종의 극한(최대)값을 나타내어 상대적으로 중요도가 높다고 할 수 있다. 그러므로, 확률변수상태에서의 응답변화도에 대한 이론적 고찰은 매우 중요하다고 할 것이다.

본 연구에서는 확률변수상태에서의 추계장 특성을 토대로, 정규분포는 물론 비정규분포를 포함한 일반 확률분포를 가지는 불확실 인수에 대한 추계론적 해석에서 확률밀도함수를 직접 이용하는 방법을 제시하고자 하며, 이를 통하여 확률변수상태에 대한 준이해론(semi-theoretical solution)를 제공하고자 한다. 추계장의 스펙트럼 특성에 대한 제한사항이 제거되었고 확률밀도 특성을 매우 근사하게 고려하고 있다는 측면에서, 얻어진 결과를 준이론해라고 표기하였다. 추계론적 해석을 통한 구조의 응답변화도는 일반적으로 추계장의 상관관계거리에 대한 함수로 주어지므로, 본 연구에서 제시하는 확률변수상태에 대한 준이론해는 이미 제시되어 있거나 또는 추후 제시될 추계론적 해석법들의 검증을 위한 기준을 제공해 줄 수 있을 것이다.

2. 추계장의 특성과 양 극한상태

추계장을 구성하는 불확실 인수의 변동은 확률밀도함수에 의한 확률적 특성치를 만족시켜야 하며, 이와 함께 이들 불확실 인수의 공간적 분포 양태는 상관관계를 나타내는 함수인 자기상관함수(autocorrelation function) 또는 스펙트럼밀도함수(spectral density function)를 만족해야 한다. 확률변수의 구조계 영역 내에서의 공간상의 분포 특성만을 생각할 경우, 추계장은 상관관계를 나타내는 인수인 상관관계거리 b에 따라 특징적인 형태로 나타난다.

그림 1은 상관관계 거리에 따른 추계장의 특성을 보여주고



(a) b=0.1 (b) b=1000.0

그림 1. 상관관계거리의 양 극한에서의 추계장 예 (b=0.1, 1000.0 에서의 예)

있다. 그림 (a)는 상관관계 거리가 작은 경우로서 추계장은 진동수가 큰 다수의 조화함수 조합으로 형성됨을 볼 수 있다. 반면 상관관계 거리가 큰 그림 (b)의 경우 주기가 큰 소수의 조화함수에 의한 조합임을 알 수 있다. 이는 추계장의 생성 알고리즘이 추계장의 상관관계 함수에 대한 고유치 해석에 기본하며, 이들 고유치와 고유벡터의 조합에 의하여 생성된다는 사실에서도 유추할 수 있다. 일반적인 추계장 생성 알고리즘의 경우, 백색잡음상태에서 멀어질수록 추계장 생성 알고리즘에 기여하는 고유벡터의 수는 감소하는 특성을 보인다.

추계장의 수치생성에 의한 몬테카를로 해석의 경우, [0, ∞] 범위에서 대표성이 있는 b값에 해당하는 표본들을 생성해야 하며, 생성된 표본에 대한 앙상블은 대상 추계장의 확률특성치는 물론 확률밀도함수를 만족하면서 동시에 스펙트럼 특성 또한 만족해야 한다. 그러나, b=∞로 표현되는 확률변수상태의 경우, 생성된 각 표본들이 상수값을 가지는 상수추계장(constant stochastic field)으로 구성되며, 따라서 스펙트럼밀도함수에 대한 조건이 사라지고 단순히 확률밀도함수로부터 구성할 수 있다. 이 경우 확률밀도함수의 x축 상의 각 점은 하나의 추계장을 대표하는 값이 되며, 확률밀도 함수 전체는 해석 대상 추계장의 전체 표본 공간을 형성하게 된다. 확률변수상태의 추계장 형성을 확률밀도함수와 관련하여 개념적으로 설명하면 다음과 같다.

2.1 일반추계장의 형성: $b \in [0, \infty)$ 의 경우

이 경우 구조 영역에 분포하는 확률변수의 분포 상황은 상관관계거리 b의 함수로 주어지며, b의 크기에 따라 다른 양태를 가지지만, 단순하게는 임의적(random)이라고 표현할 수 있다. 즉, 확률변수는 스펙트럼 특성을 만족하면서 확률밀도함수 내의 모든 값이 상관관계거리 b에 따라 구조 영역에 임의적으로 분포하게 되며, 추계장은 위치벡터 $\mathbf{x}$의 함수 $f(\mathbf{x})$로 주어진다. 이는 그림 2와 같이 개념적으로 표현할 수 있다.

예상할 수 있는 바와 같이, 상관관계거리 b의 값이 0의 값으로 근접함에 따라, 이에 해당하는 백색잡음형태의 추계장을 모사하기 위해서는, 더욱 많은 수의 부영역(유한요소)을

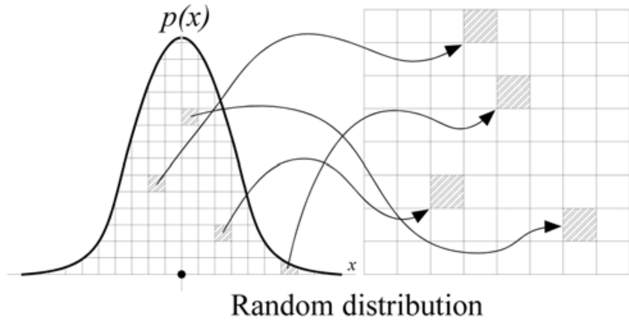


그림 2. 확률밀도함수와 추계장의 관계 ($b \in [0, \infty]$ 의 경우)

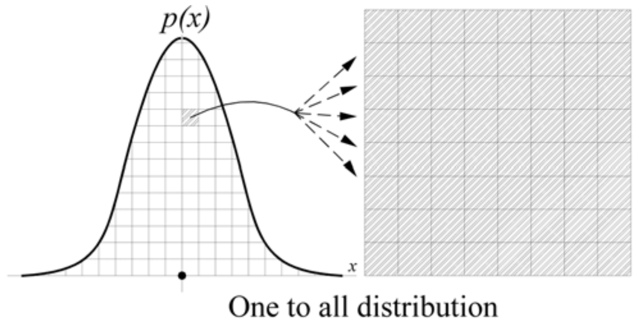


그림 3. 확률밀도함수와 추계장의 관계 (b=∞의 경우)

필요로 하게 된다.

2.2 상수추계장의 형성: b=∞의 경우

2.1절의 경우와 달리 b=∞일 경우 추계장은 확률변수상태로 나타나며 추계장은 그림 3과 같이 확률밀도함수 내의 한 구간의 값이 전체 구조영역에 걸쳐 존재하는 형태로 구성된다. 확률변수 x의 모든 x_i에 대하여 상수 추계장 $f(\mathbf{x})=f_i$가 형성되며 이들 상수 추계장은 앙상블에 의한 통계치를 만족하는 확률변수를 이루게 됨을 알 수 있다.

따라서, 확률밀도함수를 N_p개의 미소영역으로 나누고, 해석대상 구조를 N_e개의 표본점으로 모델링 할 경우, 등질성에 의한 앙상블 통계치를 만족시키기 위하여 생성해야 하는 추계장의 전체 수 N_{sf}는 단순히 $N_{sf}=N_p$가 되며, 구조응답의 통계적 특성치는 단순히 N_p개의 표본에 대한 통계해석을 통하

여 쉽게 얻을 수 있다. 그러나 x_i의 값을 가지는 표본이 $p(x_i)$의 확률을 가지고 발생하므로, 실제로 해석되는 표본의 수는 N_p보다 매우 작게 된다.

3. 확률밀도함수와 응답변화도

3.1 구조응답의 통계적 특성치 산정

2.2절에서 기술한 확률변수상태에서의 상수추계장은 확률밀도함수 $p(x)$의 x축 상의 확률변수 x_i에 해당하는 것으로서 확률변수 x_i가 구조영역 전체에 동일하게 분포하는 상태를 나타내며, 이에 해당하는 추계장의 발생확률은 확률밀도함수의 종거인 $p(x_i)$가 된다. 확률밀도함수를 만족하는 추계장의 전체 표본 수를 N_p라고 하고 단일 확률변수 x_i에 해당하는 표본 수를 e_i라고 하면(그림 4), 해당 추계장의 발생확률은 $p(x_i)=e_i/N_p$로 쓸 수 있다. 여기서, 매우 작은 발생확률 ε_p를 상정하면 $p(x_i)>\varepsilon_p$를 만족하는 구간 $[x_-, x_+]$에 대하여 n개의 소구간을 생각할 수 있다. 이들 소구간의 대표치는 n개의 확률변수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 되며 이들 각 확률변수의 발생확률은 $p(x_1)$, $p(x_2)$, $\cdots$, $p(x_n)$이 된다.

그러므로 확률변수상태의 추계장을 가지는 문제에 대한 구조응답은 확률변수 x_i에 의하여 구성되는 구조인수 $E_i^{\pm}$ 를 가지는 구조에 대한 응답으로부터 얻을 수 있다. 구조인수는 다음의 식으로 표현된다.

$$E_i^{\pm} = E_o(1+x_i) = E_o + \delta E_i \tag{2}$$

여기서, E_o는 구조인수의 평균값을 나타낸다. 구조인수 $E_i^{\pm}$ 에 대한 확률밀도는 그림 4와 같이 $p(x_i)$이며, 이 인수에 의한 구조응답 R_i는 전체 구조 응답 N_p중에서 e_i에 해당하므로, 구조응답에 대해서도 동일한 확률밀도 $p(x_i)$를 적용할 수 있음을 알 수 있다.

확률변수 x의 확률밀도함수 $p(x)$는 확률변수 x_i의 전체발생건수 대비 발생빈도를 나타내며, 확률변수 x의 평균과 분산은 식 (3)으로 쓸 수 있다.

$$\mu_x = \int_{\inf} xp(x)dx,\ Var(x) = \int_{\inf}(x-\mu_x)^2 p(x)dx \tag{3}$$

그러므로 동일한 발생확률을 가지는 구조응답 R_i의 평균과 분산도 같은 방법으로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mu_R = \int_{\inf} Rp(R)dR,\ Var(R) = \int_{\inf}(R-\mu_R)^2 p(R)dR \tag{4}$$

여기서, 확률변수 x_i의 확률밀도함수는 임의 형태를 가정할 수 있다.

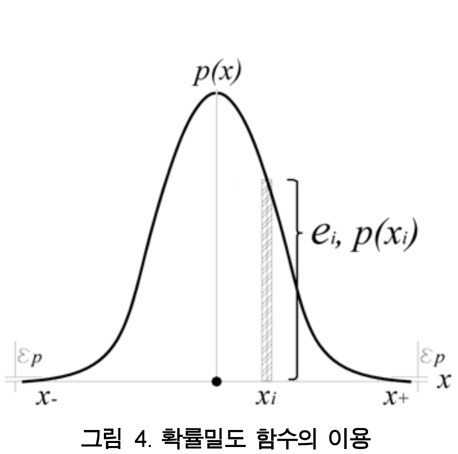


그림 4. 확률밀도 함수의 이용

식 (4)는 해석적 방법에서 얻을 수 있는 확률특성값들이며, 실제로 n개로 균등 분할된 구간에 대한 수치해석을 수행할 경우, 구조응답의 평균과 분산에 대한 실제 계산식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mu_R = \sum_{i=1}^{n} R_i p(R_i)\Delta R,\ Var(R) = \sum_{i=1}^{n}(R_i - \mu_R)^2 p(R_i)\Delta R_i \tag{5}$$

여기서, 구조응답에 대한 미소확률 $p(R_i)\Delta R_i$는 확률변수에 대한 미소확률 $p(x_i)\Delta x_i$와 같다고 볼 수 있다. 따라서, 정규분포는 물론 그 외의 특정 확률밀도함수의 경우에도 구조응답의 확률밀도함수는 확률변수에 대한 확률밀도함수와 매우 다르게 나타난다는 것에 주의해야 한다. 그 이유는, 비록 확률변수상태를 고려하기 위하여 n개의 소구간으로 나뉘어진 각 구간에서의 미소확률은 같지만, 확률밀도 자체는 서로 동일하지 않기 때문이다. 이에 대하여는 다음 절에서 논하기로 한다.

3.2 구조응답의 확률밀도함수

선형해석에서의 구조 응답은 작용하중에 대해서는 선형성을 나타내지만, 구조 인수의 불확실 변동에 의한 영향은 비선형적으로 나타난다. 즉, 하중이 두 배로 증가하면 구조의 응답도 두 배로 얻을 수 있지만, 구조의 시스템 행렬의 변동부부인 가감행렬이 두 배가 되거나 1/2로 되는 경우 이에 따른 구조의 응답은 1/2이나 두 배로 나타나지는 않는다는 것이다. 그 이유는 구조의 시스템 행렬이 평균부분 $\overline{\mathbf{K}}$와 변동부분 $\delta\mathbf{K}(S)$으로 나뉘어지기 때문이다.

$$\mathbf{K}(S) = \overline{\mathbf{K}} + \delta\mathbf{K}(S) \tag{6}$$

따라서, 구조 응답의 확률밀도는 불확실인수의 확률밀도와 다른 형태로 나타나게 되며, 이를 그림 5에 나타내었다. 식 (6)에서 S는 시스템 행렬이 추계성(stochasticity)을 포함하고 있음을 의미하기 위하여 표기하였다.

확률변수와 구조응답의 확률밀도함수가 서로 다른 형태를 가진다고 하더라도, 3.1 절에서 전술된 바와 같이, 확률변수의 특정 확률밀도의 미소분과 이에 해당하는 구조응답의 확률밀도의 미소분의 크기는 서로 같아야 한다(그림 5에서 음영으로 나타낸 두 직사각형의 넓이). 즉, 다음의 관계가 성립한다.

$$p(R_i)\Delta R_i = p(x_i)\Delta x_i \tag{7}$$

그러므로 구조응답의 확률밀도 종거는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$p(R_i) = \frac{\Delta x_i}{\Delta R_i} p(x_i) \tag{8}$$

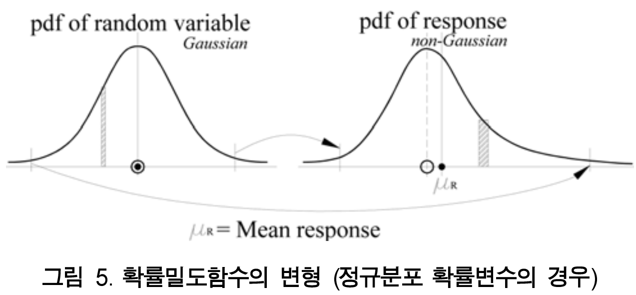


그림 5. 확률밀도함수의 변형 (정규분포 확률변수의 경우)

여기서, $\Delta R_i \neq \Delta x_i$ 이다. Δx_i가 선형적으로 변화한다고 하더라도 구조응답을 나타내는 ΔR_i는 비선형적으로 변화하므로 x_i에 의한 구조응답 R_i에서의 미소변화량 ΔR_i은 식 (9)와 같이 선형화하여 나타내기로 한다. 이러한 선형화 가정은 확률밀도함수의 x축을 소구간으로 나눈 수인 n이 충분히 클수록 정확하게 된다.

$$\Delta R_i = \frac{1}{2}\{(R_{i+1} - R_i) + (R_i - R_{i-1})\} \tag{9}$$

식 (8)의 확률밀도는 구조계 응답 R 자체에 대한 확률밀도함수로서, 이를 확률변수의 확률밀도함수와 유사한 형태로 나타내면 확률변수에 의한 구조 응답의 확률특성을 보다 쉽게 알 수 있을 것이다. 이를 위하여 식 (10)과 같이 응답을 평균에 대하여 정규화하고 평균응답만큼 이동(shift)하여 나타낸 새로운 변수 y_i로 나타낼 수 있다.

$$y_i = \frac{R_i - \mu_R}{\mu_R} \tag{10}$$

식 (10)의 변수 y_i는 식 (2)의 확률변수 $E_i^{\pm}$ 를 x_i로 나타내는 방식과 동일한 형식임을 알 수 있다. 따라서 확률변수의 확률밀도함수와 동일한 형식으로 표현한 구조응답의 확률밀도 함수의 종거는 식 (10)을 이용하여 식 (11)과 같이 쓸 수 있다.

$$p(R_i) = \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} p(x_i) \tag{11}$$

새로운 변수 y_i의 미분량이 $\Delta y_i = \dfrac{\Delta R_i}{\mu_R}$ 이므로, 식 (11)은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$p(R_i) = \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} p(x_i) = \mu_R \frac{\Delta x_i}{\Delta R_i} p(x_i) \tag{12}$$

그러므로 식 (12)는 확률밀도함수가 $p(x)$인 확률변수에 의한 구조응답의 확률밀도함수로서 응답의 평균을 중심으로 나타낸 함수가 된다. 식 (12)에서 보는 바와 같이, 구조응답에 대한 확률밀도함수는 ΔR_i에 의해서 확장 또는 축소되는 특성을 보임을 알 수 있으며, 따라서 확률변수의 확률밀도함수에 의하여 그 형태가 크게 좌우됨을 알 수 있다.

3.3 다중불확실 인수의 고려

추계론적 유한요소해석은 일반적으로 하나의 불확실인수에 의한 응답변화도 산정에 국한되는 경우가 많고, 다중의 불확실인수를 고려할 경우 정식화가 매우 복잡하다는 점 등의 어려움이 있다. 몬테카를로 해석법의 경우에서도 매 해석 때마다 생성되는 추계장의 형태가 다르므로 유동적인 결과를 제시해 줄 수 있을 뿐이며, 다중 불확실인수의 고려 및 정규분포 이외의 특정확률분포를 고려하기 위해서는 표본생성과정은 물론 해석시간에서 매우 비효율적이라는 문제를 안고 있다.

그러나 3.1, 3.2절에서 제안된 방법은 확률통계의 기본 개념을 이용한 것으로서, 그 이론적 배경이 매우 단순하지만, 확률변수상태에 대한 정확한 결과치를 제시해 줄 수 있을 뿐만 아니라, 다중 불확실인수가 개념적으로 매우 간단하게 고려될 수 있다는 강점이 있다. 즉, 두 개의 확률변수 x_1, x_2를 고려할 경우, 양의 완전상관관계에 대해서는 $x_{1i}=x_{2i}$를, 음의 완전상관관계에 대해서는 $x_{1i} = -x_{2i}$를 적용하여 나타낼 수 있다. 나아가, 정규분포는 물론 특정의 확률분포도 추가적인 어려움 없이 고려할 수 있다.

다음 장에서는 제안한 방법을 적용하여 일반 구조에 대한 추계론적 유한요소해석을 수행하고 응답의 평균 μ_R과 분산 $Var(R)$, 그리고 응답변화도(변동계수)를 기존의 해석결과와 비교하여 제시하고자 한다. 여기서 변동계수는 다음의 값을 나타낸다.

$$\frac{\sqrt{Var(R)}}{|\mu_R|} \tag{13}$$

4. 예제 해석

4.1 평면문제

4.1.1 정규분포 불확실 탄성계수에 의한 응답변화도

정규분포 탄성계수에 대한 응답변화도 해석은 추계론적 유한요소해석의 기본적인 문제로서 이에 대한 결과는 많은 연구에서 제시되어 왔다(노혁천 2005; Spanos and Ghanem 1989; Yamazaki *et al.* 1998). 10×10의 크기를 가지는 단순지지 평면구조에 대하여 평균탄성계수는 2.1×10^6, 포아송비는 0.20로 가정하였고, 평면변형률상태(plane strain state)로 가정하였다(그림 6). 확률밀도함수는 확률변수의 최소값이 -0.999가 되는 구간까지를 해석에 고려하였고, 확률변수축을 1000개의 균일한 구간으로 나누어 해석에 적용하였다. 변위에 대한 응답변화도는 그림 6의 A점에서 취하였다.

그림 7에서 보는 바와 같이 구조응답은 추계장의 변동계수에 대하여 비선형적인 거동을 보이며, 그 정도는 추계장의 변동계수가 증가함에 따라 가속화됨을 볼 수 있다. 특히, 평균의 증가에 비하여 표준편차의 증가가 매우 큰 특성을 보인다. 이러한 양상은 구조응답이 정규분포 확률밀도함수의 음의 꼬리부분에 매우 민감함을 보여주고 있다. 실제로, 식 (2)에서 $x_i = -1$인 경우 변위는 이론적으로 무한대의 값을 나타냄을 알 수 있다. 추계장 분산계수와 응답의 확률특성치 사이의 비선형관계는 1차 근사해법에서는 나타나지 않는 것으로, 이러한 특성을 나타내는 고차 해석법은 Noh(2006b)와

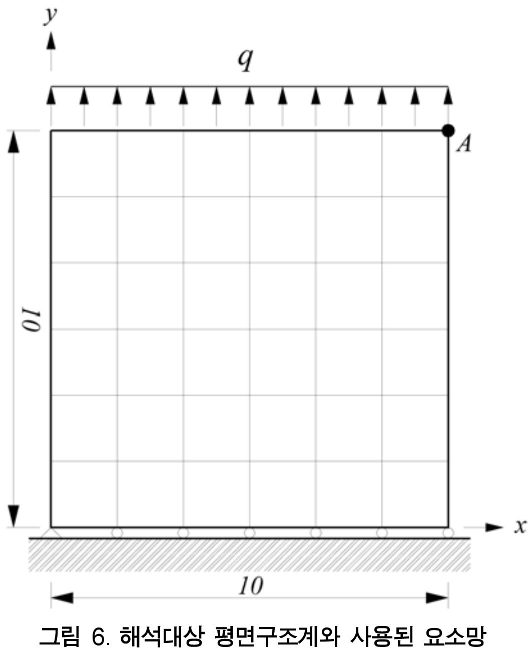


그림 6. 해석대상 평면구조계와 사용된 요소망

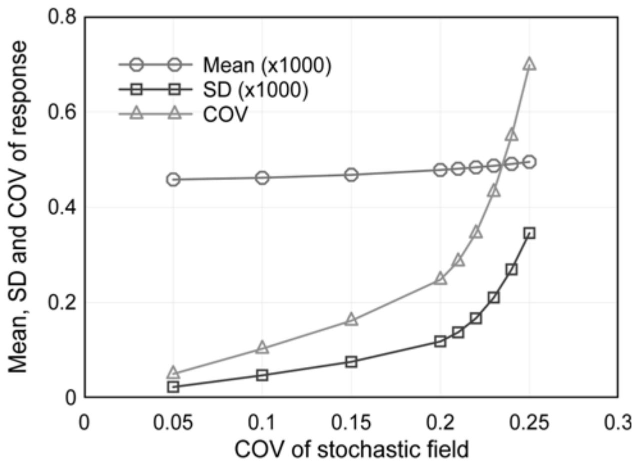


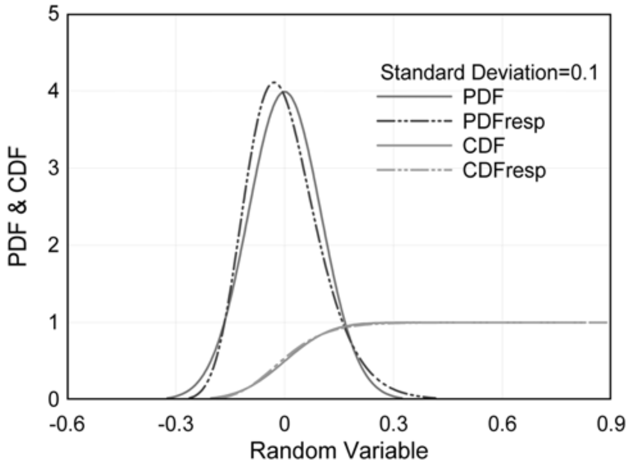
그림 7. 추계장 변동계수에 따른 y-변위의 통계적 특성치와 분산계수

Spanos and Ghanem(1989) 등 몇몇 연구에서 찾을 수 있다. 이들 두 연구에서는, 일정 수준 이상의 고차항을 고려할 경우 발생할 수 있는 프로그램작성 및 해석시간의 과다 증가 등의 현실적 제한으로 인하여, 단순히 변위의 고차항 일부만을 포함한 정식화를 수행하였기 때문에 추계장 분산계수가 0.3인 높은 수준의 불확실 정도에서도 응답의 분산계수가 완만하게 증가하는 결과들을 제시하고 있다. 그러나 추계장 분산계수 0.25인 경우 구조인수가 음의 값을 가질 확률이 $prob\{x_i \leq -1.0\}$ =0.0032%라는 것을 감안하면 구조응답의 민감도가 매우 크리라는 것을 예상할 수 있으며, 그림 7의 결과는 이러한 예상과 잘 부합되는 결과라고 할 수 있다.

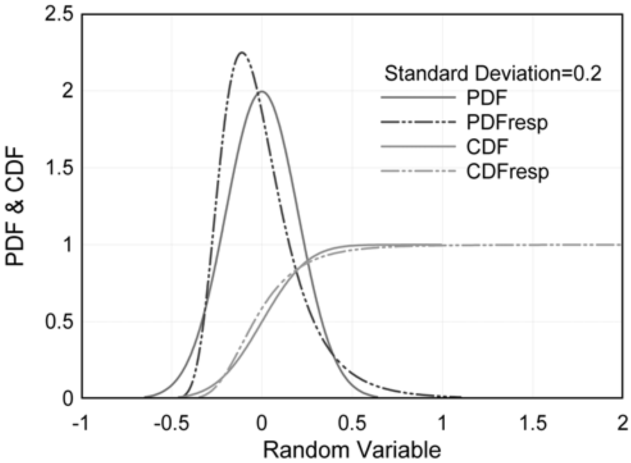
그림 8은 확률변수의 확률밀도함수와 구조응답의 확률밀도함수를 동시에 나타낸 것으로 추계장의 변동계수 0.1과 0.2에 대한 결과이다. 응답에 대한 확률밀도함수의 가로축은 3.2절에서 제시된 바와 같이 $y_i = R_i/\mu_R - 1$로 변환한 값을 나타낸다. 구조응답은 확률변수의 분포와는 달리 비정규분포를 보이며 추계장 변동계수의 증가에 따라 그 비틀림 정도가 증가함을 알 수 있으며, 중앙값(누적분포함수(Cumulative Distribution Function: CDF)가 0.5가 되는 값)도 추계장 분산계수의 증가에 따라 평균값에서 거리가 멀어짐을 알 수 있다. 확률변수와 구조응답에 대한 누적분포함수는 모두 $F(\infty)$ =1.0을 만족하고 있다.

4.1.2 다중 불확실인수: 탄성계수와 포아송비

3장에서 제안된 방법을 사용하면, 탄성계수와 포아송비가 모두 정규분포 한다는 가정하에, 두 변수 사이에 양과 음의 완전상관관계(ρ_{vE} = −1 or +1)를 가지는 경우를 해석할 수 있다. 양과 음의 완전상관관계는 한 변수(예, 탄성계수) x_i에 대하여 다른 변수(예, 포아송비)가 $+x_i(\rho_{vE}=+1)$이거나 또는 $-x_i(\rho_{vE}=-1)$가 되는 경우라고 할 수 있다. 실제로 현재까지 제안되어 있는 추계장에 대한 수치생성알고리즘을 적용하여 양과 음의 완전상관관계를 가지는 추계장을 생성하면 이들은 상호 동일하거나 서로 부호가 다른 추계장을 생성함을 볼 수 있다(Noh, 2006a). 그러나 상관관계가 (-1, 1)내에 있는 경우 확률밀도함수를 이용한 두 확률변수 사이의 관계설정이 불확실하며, 따라서 제안된 해석법으로는 해석이 용이하지 않다.



(a) 추계장의 변동계수가 0.1인 경우



(b) 추계장의 변동계수가 0.2인 경우

그림 8. 확률변수와 응답의 확률밀도함수(평면구조: 평면변형률)

4.1절에 사용된 동일한 평면문제에 대하여 확률변수상태에 대한 해석 결과 및 기존연구에 제시된 결과는 표 1과 같다. 표 1에서 보는 바와 같이 제안방법에 의한 결과는 기존의 근사해법에 대한 극한 수렴치를 제공하고 있음을 알 수 있으며, 나아가, 기존의 해석법이 다항식전개에 의하여 포아송비를 근사적으로 고려함에 의해서 다소 과소평가된 응답변

표 1. 탄성계수와 포아송비의 불확실성에 의한 응답변화도(변동계수)

COV	상관관계 계수	분산계수(x-방향변위)			분산계수(y-방향변위)		
		제안 해석법(*)	Noh, 2006a(**)	(*)/(**)×100	제안 해석법(*)	Noh, 2006a (**)	(*)/(**)×100
0.1	ρ_{vE} = −1	0.2215	0.2174	101.9	0.0945	0.0918	102.9
	ρ_{vE} = +1	0.0167	0.0466	35.8	0.1116	0.1090	102.4
0.2	ρ_{vE} = −1	0.5202	.		0.2255	.	
	ρ_{vE} = +1	0.0333	.		0.2651	.	

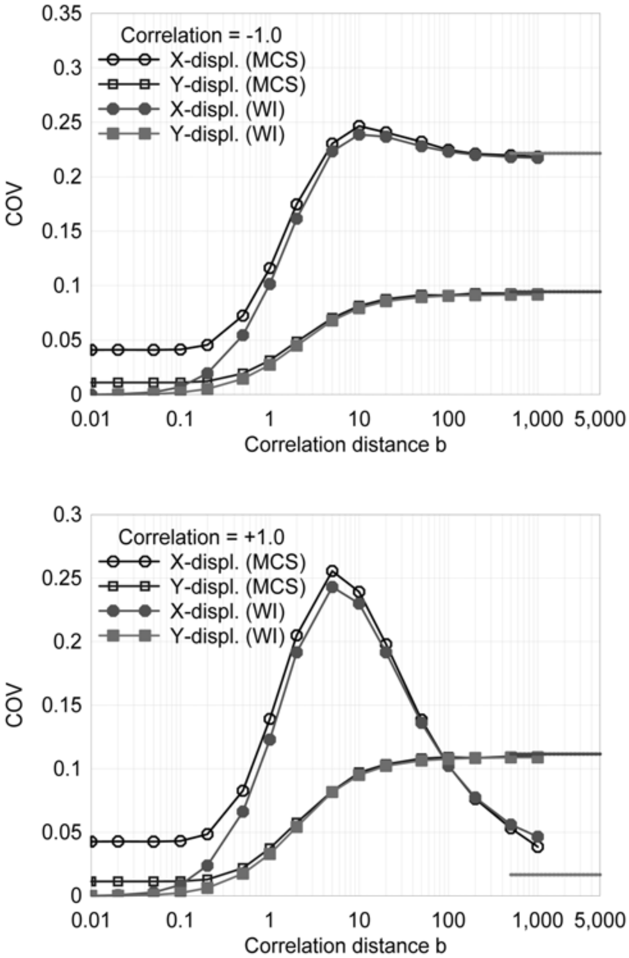


그림 9. 평면문제에 대한 해석 결과: 기존 해석결과와의 비교

화도를 제공하고 있음을 보여주고 있다. (*x*-방향 변위의 경우 확률변수상태에서의 분산계수는 양의 상관관계로 갈수록 감소하는 값을 나타내므로 표 1에 제시된 백분율 비교치는 큰 의미를 가지지는 않는다.)

단일 불확실인수에 의한 응답변화도는, y-방향 변위에 대하여, 불확실 탄성계수에서 추계장 변동계수가 0.1인 경우 0.1032, 0.2인 경우 0.2481이며, 포아송비의 경우 0.00836 (0.1), 0.0169(0.2)이다.

그림 9는 $b=\infty$에서의 수렴값 표시를 위하여 임의로 선정한 b=[500, 5000]의 구간에 각 경우에 대한 극한치를 점선으로 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 *x*-방향 변위의 경우도 제안한 해석법이 극한치를 잘 보여주고 있음을 볼 수 있다. 그림 9에서 WI로 표시된 결과는 가중적분법에 의한 결과를 나타낸다 (Noh 2006a).

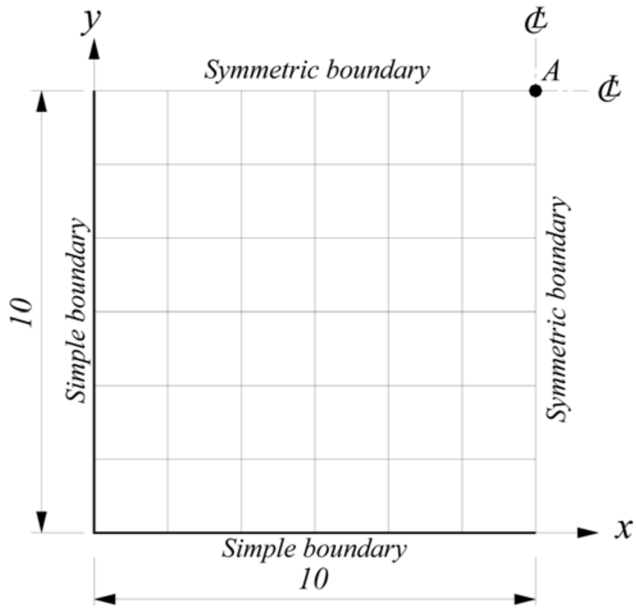


그림 10. 단순지지 평판

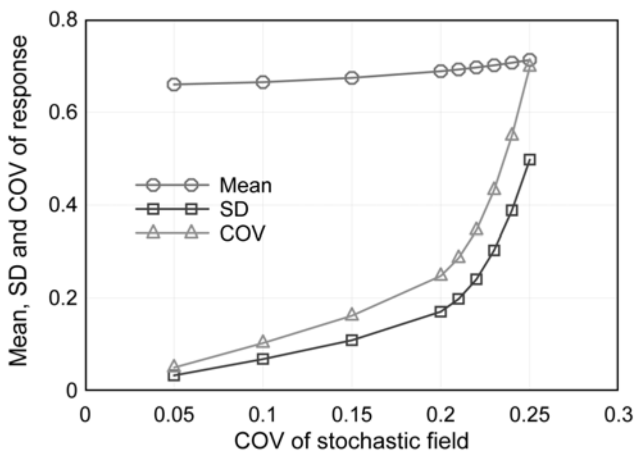


그림 11. 중앙점 연직변위의 확률 특성치와 변동계수

4.2 평판 예제

본 절에서는 단순지지된 20×20 크기의 평판에 대한 해석을 수행하였다(그림 10). 평균탄성계수는 10920.0, 평균포아송비는 0.3, 그리고 평균두께는 1.0으로 가정하였다. 하중으로는 평판의 상부에 등분포하중을 작용하였고, 구조와 하중의 대칭성을 고려하여 1/4모델을 사용하였다. 구조응답의 확률 특성치들은 그림 10의 A점에서의 연직변위에 대하여 나타내었다.

4.2.1 불확실 탄성계수

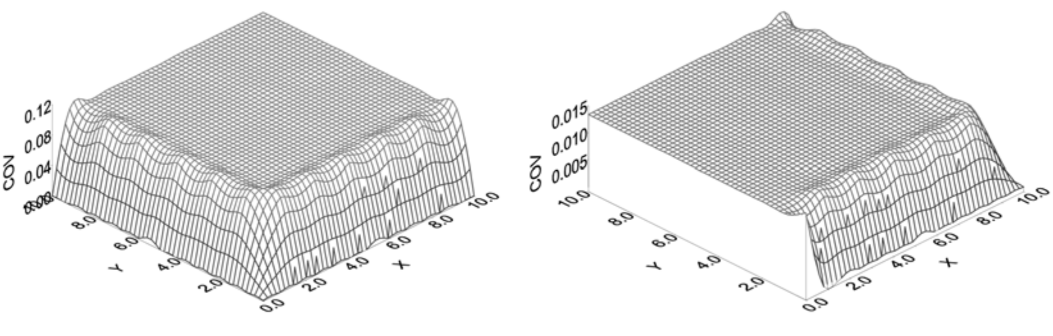


그림 12 탄성계수의 불확실성에 의한 연직변위 및 *x*-방향 회전변위(*y*-축 중심 회전변위)의 응답변화도: 추계장 변동계수=0.1

표 2. 탄성계수와 포아송비의 불확실성에 의한 응답변화도(변동계수), (μ_v=0.2)

COV	상관관계 계수	변동계수			
		제안된 해석법(*)	Noh, 2006a(**)	(*)/(**)×100	MCS (Noh, 2006a)
0.1	ρ_{vE} = –1	0.0948	0.0917	103.4	0.0930
	ρ_{vE} = +1	0.1113	0.1079	103.2	0.1091
0.2	ρ_{vE} = –1	0.2262	·		·
	ρ_{vE} = +1	0.2645			

표 3. 탄성계수와 평판두께의 불확실성에 의한 응답변화도(변동계수), (μ_v = 0.25)

COV	상관관계 계수	변동계수			
		제안된 해석법(*)	Noh, 2005(**)	(*)/(**)×100	MCS (Noh, 2005)
0.1	ρ_{Et} = –1	0.2184	0.1911	114.3	0.1948
	ρ_{Et} = +1	0.4537	0.4195	108.2	0.4244

불확실 탄성계수에 의한 평균, 표준편차 및 변동계수는 그림 11과 같이 나타났으며, 확률변수와 응답의 확률밀도함수는 그림 7과 유사하게 나타났다. 4.1절의 평면문제에 대한 결과와 비교하면, 평균 응답과 응답의 분산은 다르게 나타났으나 분산계수는 동일하게 산정되었다.

연직변위와 x-방향으로의 회전(y-축을 중심으로 한 회전변위)에 대한 응답변화도의 전체 구조영역상의 분포는 그림 12와 같다. 얻어진 결과는 기존연구(Noh 2004)와 동일한 형태로 나타남을 알 수 있다.

4.2.2 다중불확실인수에 의한 응답변화도

1) 기존 해석법과의 비교

여기서 다중이라고 함은 하나 이상의 불확실인수를 해석에 고려함을 의미하며, 본 절에서는 기존연구와의 비교를 위하여 "탄성계수와 포아송비" 그리고 "탄성계수와 평판두께"가 동시에 불확실인수로 고려된 두 경우에 대하여 각각 해석을 수행하여 그 결과를 비교하였다. 표 2와 3에 나타낸 바와 같이 각 경우에 사용된 평균 포아송비는 각각 0.2와 0.25이다.

탄성계수와 포아송비를 불확실인수로 가정한 해석결과는 표 2에 나타내었다. 본 연구에서 제안된 해석법과 기존 연구는 개략적으로 3%정도의 차이를 나타내고 있다. 이는 기존 연구(Noh, 2006a)가 포아송비에 대한 무한차수의 다항식 전개에 바탕을 두고 있으나 단지 3차 항까지만을 고려한 근사해석에 근거하고 있기 때문인 것으로 생각된다. 따라서 기존연구에서 제시된 정식화는 3차 이상의 고차항을 포함하는 새로운 정식화로 수정되어야 할 것으로 생각된다.

그림 13은 확률변수상태에서의 응답변화도 극한치를 상관관계거리 500에서 5000사이의 위치에 점선으로 나타내어 기존 연구결과와 비교한 것이다. 상관관계거리가 커질수록 기존해석에 의한 결과도 다소간 개선될 것으로 예측되기는 하지만, 전술한 바와 같이, 불확실 포아송비 고려 시 적용한 근사해법에 의한 차이를 보여주고 있다.

평판에서 탄성계수와 기하학적 변수의 하나인 평판두께를 불확실 인수로 가정하고 해석한 결과는 표 3에 제시하였다. 이 경우에서는 제안 해석법과 기존연구에서 다소 큰 차이를 나타내고 있음을 볼 수 있다. 이러한 차이는, 평판의 두께변수가 3차의 고차변수이므로, 1차 변수인 다른 확률변수들에

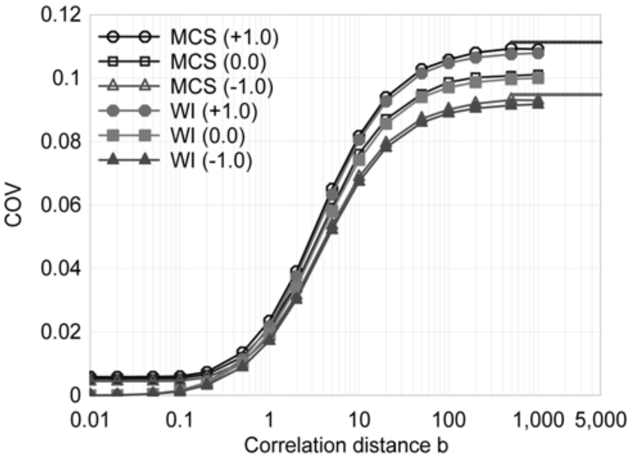


그림 13. 단순지지 평판의 응답변화도와 극한치: 탄성계수와 포아송비가 불확실 인수인 경우

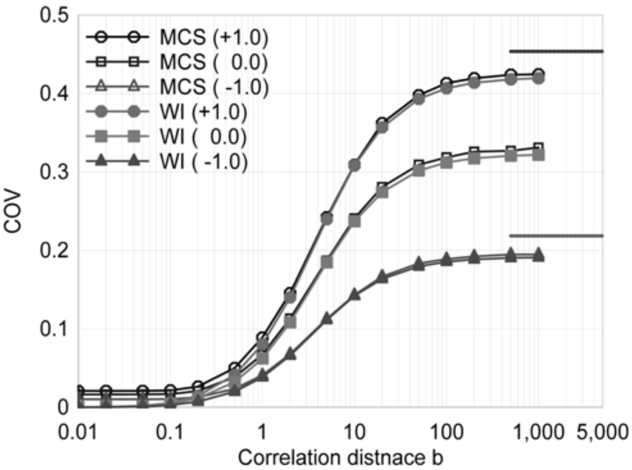


그림 14. 단순지지 평판의 응답변화도와 극한치: 탄성계수와 평판두께가 불확실 인수인 경우

비하여 Taylor전개에 의한 근사해법 정식화가 오류가 크기 때문인 것으로 생각된다. 본 연구에서 제안한 해석에서 평판두께만을 불확실 인수로 가정한 경우 연직방향 변위에 대한 응답변화도는, 추계장의 분산계수가 0.1인 경우, 0.3258로서 0.3정도의 값을 제시한 기존연구(Lawrence 1987; Noh, 1996, 2005)보다 상대적으로 매우 크게 나타남을 알 수 있었다.

표 4. 세 인수 사이의 상호상관관계

	I	II	III	IV
ρ_{Ev}	+1	+1	–1	–1
ρ_{Et}	+1	–1	+1	–1
ρ_{vt}	+1	–1	–1	+1

표 5. 응답변화도 (v_o=0.25)

COV	I	II	III	IV
0.1	0.4686	0.2093	0.4431	0.2270
$-f$ 인수		$-t$	$-v$	$-t$, $-v$

2) 3중 불확실 인수: 탄성계수, 포아송비 및 평판두께

여기서는 평판에 나타날 수 있는 모든 불확실인수(탄성계수, 포아송비 및 평판 두께)를 고려한 해석을 수행하였다. 세 개의 구조인수에 대한 불확실성을 고려한 해석의 경우 상관관계에 있어 한 변수는 다른 두 변수에 종속관계에 있으므로 상호 상관관계는 표 4와 같이 4가지의 경우를 생각할 수 있으며, 그 결과는 표 5에 제시하였다.

추계장의 분산계수가 0.1인 경우 탄성계수, 포아송비 그리고 평판두께 등의 단일 불확실인수에 의한 평판의 응답변화도는 각각 0.1032, 0.013 그리고 0.3258의 값을 나타내며, 표 4와 5의 네 경우에서는 상호 상관관계에 따라 가중치가 곱해진 이들 값들이 가감되면서 나타나는 특성이 보임을 알 수 있다.

4.3 탄성계수에 대한 대수정규분포(Log-Normal distribution) 가정과 응답변화도

4.3.1 대수정규분포

탄성계수를 포함한 일부 구조변수들은 정규분포보다는 대수정규분포로 표현하는 것이 더 합리적일 수 있으며, 지금까지 비정규분포로 명명되어 추계장에 대한 수치생성 알고리즘이 제공된 확률분포는 대부분 대수정규분포와 유사한 형태를 가지고 있다(Deodatis and Micaletti 2001). 대수정규분포는 확률변수 x의 자연대수인 $\ln(x)$가 정규분포인 확률분포로서 확률밀도함수는 식 (14)로 표현되며,

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{14}$$

그 평균과 분산은 식 (15)와 같다.

$$E(X)=e^{\mu+\sigma^2/2}$$
$$Var(X)=(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2} \tag{15}$$

그림 15는 정규분포와 대수정규분포에 대한 확률밀도함수를 표준편차 0.1, 0.2 그리고 0.3에 대하여 나타낸 것이다. 대수정규분포는 모든 x값이 $x>0$인 범위에서 결정되나, 정규분포와의 비교와 실제 구조인수에의 적용을 위하여 각 경우에서 평균치만큼 이동하여 평균값이 0이 되도록 수정하여 나타내었고, 이를 해석에 적용하였다. 두 확률분포는 표준편차가 증가함에 따라 확연한 차이를 나타내고 있으며, 각 확률밀도함수의 특성을 잘 보여주고 있다.

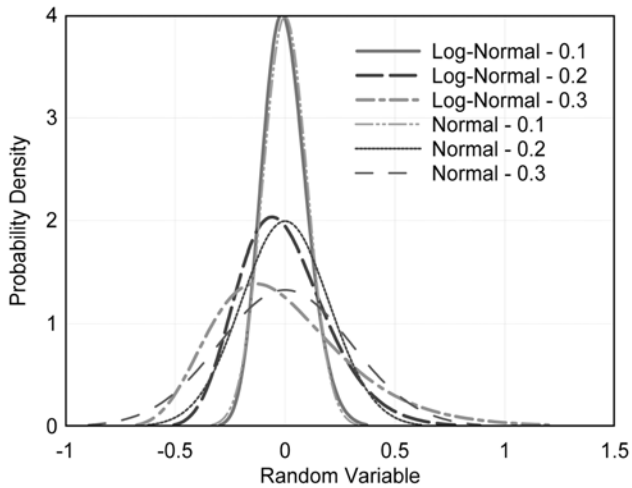


그림 15. 확률분포의 비교: 정규분포와 대수정규분포

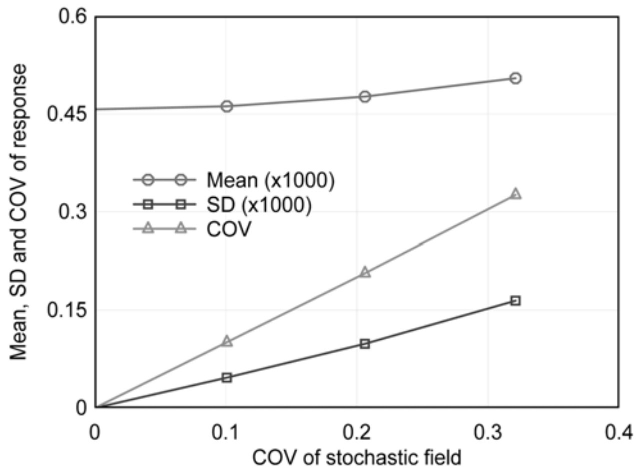


그림 16. 추계장 분산계수에 따른 y-방향 변위의 통계적 특성치와 분산계수

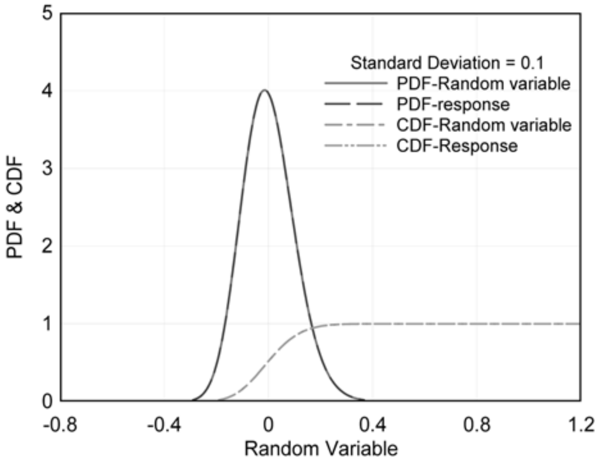
4.3.2 응답변화도

대수정규분포 확률변수에 의한 구조의 응답변화도 특성을 파악하기 위하여 4.1절 그림 6의 평면변형률상태에 있는 평면구조에 대한 해석을 수행하였다. 구조에 대한 모든 조건은 4.1절에 기술된 내용과 동일하며, 그림 6의 A점에 대한 응답변화도를 결과로 제시하였다. 해석에 고려한 확률밀도함수의 영역은 최소확률밀도함수 값이 최대확률밀도 대비 10×10^{-15} 인 부분까지로 택하였다.

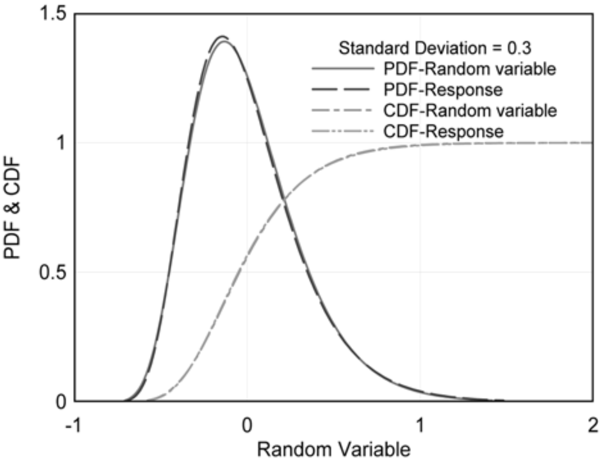
그림 16은 대수정규분포의 인수인 σ의 변화에 따른 예제구조의 응답변화도에 대한 그림으로서, μ=0이고 σ를 0.1,

표 6. Log-Normal 확률밀도에 따른 구조 응답

μ	σ	$E(x)$	$\sqrt{Var(x)}^{(a)}$	응답 COV(b)	추가변동계수(%) (b/a×100)
0.0	0.1	1.005012521	0.100753	0.100768	100.015
	0.2	1.020201340	0.206100	0.206643	100.265
	0.3	1.046027860	0.321003	0.325990	101.553



(a) 추계장의 분산계수가 0.1인 경우



(b) 추계장의 분산계수가 0.3인 경우

그림 17. 확률변수와 응답의 확률밀도함수 (평면구조: 평면변형률)

0.2 그리고 0.3으로 변화시키면서 얻어진 응답의 확률 특성치(평균, 표준편차 및 변동계수)를 식 (15)에 의해서 얻어지는 표준편차를 x축으로 하여 나타낸 것이다. 0.1, 0.2 그리고 0.3의 σ에 대하여 식 (15)의 표준편차는 표 6의 네 번째 열에 나타낸 바와 같다. 표 6에서 6번째 열에 나타낸 '추가변동계수'는 응답의 변동계수를 추계장의 표준편차로 나눈 값을 백분율로 나타낸 것이다. 표에서 보는 바와 같이 탄성계수에 대한 대수정규분포 가정에 의한 추가변동계수는 정규분포 가정하에서의 그것보다 매우 적게 나타나는 것을 볼 수 있다. 이는 대수정규분포의 경우 확률밀도함수의 음의 꼬리부분이 -1.0에서 상당히 떨어져 있기 때문으로, 이에 따라 응답의 통계적 특성이 매우 완만하게 증가하고 있음을 알 수 있다.

따라서 탄성계수에 대한 대수정규분포 가정은 확률적 표현에서는 정규분포에 비하여 엄밀한 가정이지만, 구조응답의 차원에서 본다면 정규분포 가정이 오히려 더 민감한 반응을 보인다고 할 수 있다.

그림 17에서 보는 바와 같이 대수정규분포의 경우에 대한 확률변수와 구조응답의 확률밀도함수는, 정규분포와는 달리, 서로 매우 유사하게 나타나고 있다. 이러한 결과는 구조응답이 시스템 행렬의 역에 의하여 얻어진다는 사실에 기인하며, 음의 꼬리부분에 해당하는 확률변수의 값에 매우 민감했던 정규분포의 경우와는 달리, 대수정규분포의 경우 음의 꼬리부분이 -1.0에서 다소 거리가 멀며, 반대로, +1.0 이상의 값을 가지는 확률변수에 대한 발생확률도 무시할 수 없을 정도로 존재하기 때문이다.

5. 결 론

본 논문은 추계장의 특성을 나타내는 인수인 상관관계거리가 무한대인 경우 추계장 표본이 상수추계장으로 형성된다는 사실과, 이 경우 추계론적 해석에 확률밀도함수를 직접적으로 이용할 수 있음을 고찰하여, 확률변수상태에서의 구조응답변화도에 대한 준 이론해를 제시하였으며, 평면문제와 평판구조에 대하여 그 결과를 예시하였다.

제안된 해석법은 정규분포 확률변수에 의한 구조 응답변화도는 물론 임의의 확률밀도함수를 가지는 확률변수의 경우에도 적용할 수 있으며, 구조응답의 확률밀도함수를 매우 정확하게 얻을 수 있다. 이를 보이기 위하여 대수정규분포로 가정된 불확실탄성계수에 대한 해석 예를 제시하였다.

제안된 준이론해는 기존의 해석 결과들과의 비교를 통하여 그 합리성을 보여주었으며, 평판의 두께변수의 경우 기존의 해석법에 의한 결과가 실제의 응답변화도를 크게 과소평가하고 있는 사실도 알 수 있었다.

본 논문에서 제시된 준이론해는 새롭게 개발되는 추계론적 해석방법의 검증을 위한 비교자료로 사용이 가능함은 물론 불확실인수의 여러 양태에 대한 해석 또한 가능하여 구조응답변화도 산정에서 그 의미가 클 것으로 기대된다.

감사의 글

본 논문은 사회기반시설물 평가 중점연구단(ISARC)의 지원하에 연구되었으며, 저자는 이에 감사의 말씀을 드립니다.

참고문헌

노혁천(2004) 불확실성을 가지는 재료상수간의 상관관계를 고려한 평판구조의 추계론적 유한요소해석 정식화, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제24권 제4A호, pp. 779-788.

노혁천(2005) 상호 상관관계가 있는 다중 재료상수의 불확실성에 의한 평면구조의 확률론적 거동, **한국전산구조공학회 논문집**, 한국전산구조공학회, 제18권 제3호, pp. 291-302.

Joint Committee on Structural Safety (JCSS) (2001) Probabilistic Assessment of Existing Structures, RILEM Publications S.A.R.L. The publishing Company of RILEM.

Choi C.K. and Noh H.C. (1996) Stochastic Finite Element Analysis of Plate Structures by Weighted Integral Method, *Structural Engineering and Mechanics,* (6), pp. 703-715.

Deodatis, G., Graham-Brady L. and Micaletti, R. (2003) A hierarchy of upper bounds on the response of stochastic systems with large variation of their properties: random variable case, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18, pp. 349-363.

Deodatis, G. and Micaletti, R.C. (2001) Simulation of highly skewed non-Gaussian stochastic processes, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 127, No. 12, pp. 1284-1295.

Micaletti, R.C. (2000) Direct Generation of Non-Gaussian Weighted Integrals, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 126, No. 1, pp. 66-75.

Noh, H.C. (2004) A Formulation for Stochastic Finite Element Analysis of Plate Structures with Uncertain Poisson's Ratio, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47), pp. 4857-4873.

Noh, H.C. (2005) Stochastic behavior of Mindlin plate with uncertain geometrical and material parameters, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20(4), pp. 296-306.

Noh, H.C. (2006a) Effect of Multiple Uncertain Material Properties on Statistical Behavior of In-plane and Plate Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 195(19-22), pp. 2697-2718.

Noh, H.C. (2006b) Monte Carlo simulation-compatible stochastic field for application to expansion-based stochastic finite element method, submitted to *Computers and Structures*.

Spanos P.D. and Ghanem R. (1989) Stochastic finite element expansion for random media, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 115, No. 5, pp. 1035-1053.

Yamazaki, F., Shinozuka, M., and Dasgupta, G. (1998) Neumann expansion for stochastic finite element analysis, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 114, No. 8, pp. 1335-1355.

(접수일: 2006.5.15/심사일: 2006.8.24/심사완료일: 2006.9.17)