

## 면내회전자유도를 가지는 4절점 비적합 평면셸요소의 개발

### A 4-Node Non-conforming Flat Shell Element with Drilling DOF

최창근\* · 이필승\*\* · 박용명\*\*\*

Choi, Chang-Koon · Lee, Phill-Seung · Park, Yong-Myung

#### Abstract

In this paper, a versatile flat shell element has been developed by combining a membrane element with drilling degree-of-freedom and a plate bending element. This element possesses six degrees-of-freedom (DOF) per node which permit an easy connection to other types of finite elements with six DOF per node and improve the element behavior as well. Particularly the new element is useful for the analyses of folded plate structure. In plate bending part, an improved Mindlin plate element has been established by the combined use of the addition of non-conforming modes and the substitute shear strain fields. In membrane part, the non-conforming displacement modes are added to the displacement fields to improve the basic behavior of membrane element with drilling DOF. The flat shell element proposed in this study passes the patch tests, does not show any spurious mechanism, and does not produce shear locking phenomena. This element yielded reliable solutions even for the distorted meshes for some selected benchmark problems.

*Keywords* : flat shell element, non-conforming mode, Mindlin plate element, membrane element, drilling degree-of-freedom

#### 요 지

본 논문에서는 면내회전자유도를 가지는 평면응력요소와 평판휨요소를 결합한 4절점 평면 셸 요소를 개발하였다. 본 요소는 절점당 6개의 자유도를 가지므로 요소의 면내 거동이 향상되고 다른 요소와의 결합이 용이하며, 특히 절판구조물의 해석에 유용하다. 먼저, 평판휨요소 부분은 비적합모드의 추가 및 대체변형률장을 사용하여 개선된 Mindlin 4절점 평판요소를 개발하였다. 면내회전자유도를 가지는 평면응력요소 부분에도 비적합모드를 추가하여 요소의 거동을 향상시켰다. 제안된 평면셸요소는 조각시험을 통과하고 영에너지모드를 지니고 있지 않으며 전단잠김현상을 보이지 않는다. 대표적인 예제에 대한 수치해석으로부터 본 요소는 신뢰할 수 있는 결과를 보이며 특히 찌그러진 요소망에서도 좋은 거동을 보였다.

**핵심용어** : 평면셸요소, 비적합모드, Mindlin-평판요소, 평면응력요소, 면내회전자유도

\*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수

\*\*정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

\*\*\*정회원 · 포항산업과학연구원 토목구조연구팀 책임연구원

# 1. 서 론

셸 구조는 막(membrane) 거동과 휨(bending) 거동을 동시에 고려할 수 있는 구조적 효율성 때문에 여러 분야의 공학적 구조에 많이 사용되고 있다. 일반적으로 유한요소법에 의한 셸 구조해석에는 크게 고전적인 셸이론에 의한 곡면셸요소(curved shell element), 평면응력요소와 평판휨요소를 독립적으로 결합한 평면셸요소(flat shell element) 그리고 일체등매개변수요소로부터 유도된 감절점셸요소(degenerated shell element)를 이용하는 세가지 구성법이 있다. 이러한 구성법에 의한 셸요소는 일반적으로 면의 수직방향 회전에 대한 자유도를 제외한 절점당 5개의 자유도만을 가지므로 유한요소 해석에 있어서 면내회전 자유도의 부족은 여러 가지 문제를 일으키게 된다. 이에 대한 해결책으로 해당 자유도 성분을 제한하거나 임의의 강성을 부여하는 방법이 사용되어 왔다.

한편, 셸 구조물을 해석함에 있어 곡률을 가지는 셸의 형상은 잘게 쪼개어 생각하면 편평한 면의 연속체로 처리할 수 있다는 물리적 개념과 사용상의 편리함으로 인해 실무에서는 평면셸요소를 많이 사용하며 특히 절판 형태의 구조물의 해석에는 매우 효과적이다. 평면셸은 1961년 Greene 등에 의해 처음으로 제안된 이래, 회전자유도의 고려를 위해 최근 Jetteur(1986)<sup>18)</sup>, Ibrahimbegovic(1990)<sup>2)</sup> 등이 면내회전자유도를 가지는 평면응력요소를 평면셸에 적용함으로써 새로운 전기를 마련하고 있다.

본 연구에서는 그림 1에 보인 바와 같이 Mindlin 평판요소와 6변제 자유도인 면내회전자유도를 가지는 평면응력요소의 결합에 의하여 절점당 6개의 자유도를 가지는 개선된 평면셸요소를 개발하였다. 개발한 요소에서 평판요소는 대체전단변형률장의 구성 및 비적합모드의 추가를, 평면응력요소는 비적합모드를 추가를

통해 거동의 향상을 꾀하였다. 본 요소는 조각시험(patch test)을 통과하고 영에너지모드(zero energy mode)와 전단잠김(shear locking) 현상도 없으며, 수치해석으로부터 우수한 거동을 보였다.

# 2. Mindlin 평판요소의 개발

## 2.1 Mindlin 평판요소의 개선책

평판휨요소는 크게 Kirchhoff의 얇은 평판 이론에 근거하여 전단변형을 무시하고 휨 변형만 고려하는 요소와 휨 변형 외에 전단변형까지 고려하는 Reissner-Mindlin 이론에 기초한 요소가 있다. Reissner-Mindlin 이론에 기초한 요소는 통상 Mindlin 평판요소라고 불리며 두꺼운 평판에도 적용 가능하고 Kirchhoff 이론에 의한 요소보다 정식화가 훨씬 간편하기 때문에 널리 쓰인다. 그러나 Mindlin 평판요소는 두께가 얇아졌을 때 전단강성이 과대평가되어 이른바 전단잠김 현상이 발생하는 치명적인 단점을 지니고 있다. 이를 극복하기 위한 방법으로는 1) 선택적감차적분(selectively reduced integration), 2) 대체변형률장(substitute strain field)의 이용, 3) 비적합변위모드형(non-conforming displacement mode)의 추가 등의 기법이 있다.

선택적 감차적분에 의한 방법(Zienkiewicz *et al.* 1971, Hughes *et al.* 1978)<sup>15, 22)</sup>은 요소 내에서 전단변형률이 실제 전단변형률과 거의 같은 양을 보이는 적분점에서 수치적분을 수행하는 다소 직관적인 방법이다. 이 방법은 거동은 크게 개선시킬 수 있으나, 조각시험의 실패나 적분치수의 부족으로 인한 영분의 영에너지모드를 발생시키는 단점을 지니고 있다. 대체변형률장의 구성에 의한 방법(Hinton *et al.* 1986, Donea *et al.* 1987)<sup>9, 12)</sup>은 올바른 전단변형률을 표현하도록 전단변형률장을 새로이 구성하는 방법

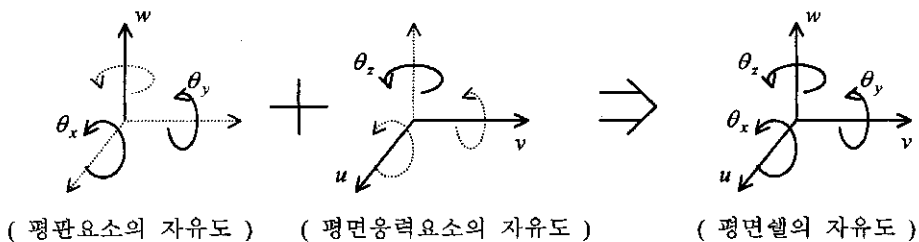


그림 1. 절점당 6개 자유도의 구성

이다. 마지막으로 비적합변위모드를 추가하는 방법 (Choi and Schnobrich 1975, Choi *et al.* 1998, Wilson and Ibrahimbegovic 1990)<sup>4, 7, 10</sup>은 적분과정에서 인위적으로 전단에너지를 무시하는 것과는 달리 원래의 변위장에 추가적인 변위모드를 추가함으로써 실제변위를 복원하는 것이다. 이 방법은 전단잠김현상의 제거 및 찌그러진 요소에 대하여 거동을 향상시켜 준다.

상기의 각 방법들은 개별적으로 적용될 때 Mindlin 평판요소의 문제점을 완전히 극복하지는 못하며 완전한 평판요소를 개발하기 위해서는 세가지 방법들을 적절히 혼용하는 방법을 생각할 수 있다(Choi and Kim 1991, Park and Choi 1998)<sup>5, 24</sup>. 본 논문에서는 상기의 기법을 혼용하여 4절점 평판원소요소를 개발하였다.

## 2.2 개선된 평판원소요소의 정식화

변위장은 등매개변수(isoparametric) 4절점 요소 변위장에 요소의 휨거동을 개선하기 위하여 회전변위 성분에 두개의 비적합모드( $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ )를 추가하였다.

$$\begin{aligned} w &= \langle N \rangle \{w\} \\ \theta_x &= \langle N \rangle \{\theta_x\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{\theta}_x\} \\ \theta_y &= \langle N \rangle \{\theta_y\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{\theta}_y\} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\langle N \rangle$ 은 기본 형상함수이며  $\langle \bar{N} \rangle$ 는 비적합모드(그림 2)이고  $\bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$ 는 비적합변위이다.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ \bar{N}_1 &= 1-\xi^2, \bar{N}_2 = 1-\eta^2, \bar{N}_3 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (2)$$

변위-변형률 관계는 등매개변수요소의 변위-변형률 관계식에 비적합모드의 추가에 의하여 비적합변위와

변형률의 관계를 나타내는  $\bar{\mathbf{B}}_b, \bar{\mathbf{B}}_s$ 가 추가되게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & z \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} & \langle 0 \rangle & z \frac{\partial \langle \bar{N} \rangle}{\partial x} \\ \langle 0 \rangle & -z \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} & \langle 0 \rangle & -z \frac{\partial \langle \bar{N} \rangle}{\partial y} & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & -z \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} & z \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} & -z \frac{\partial \langle \bar{N} \rangle}{\partial x} & z \frac{\partial \langle \bar{N} \rangle}{\partial y} \\ \frac{\partial \langle \bar{N} \rangle}{\partial y} & -\langle N \rangle & \langle 0 \rangle & -\langle N \rangle & \langle 0 \rangle \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} & \langle 0 \rangle & \langle N \rangle & \langle 0 \rangle & \langle \bar{N} \rangle \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\theta_x\} \\ \{\theta_y\} \\ \{\bar{\theta}_x\} \\ \{\bar{\theta}_y\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

위 식의 변위-변형률 관계 행렬을 부분행렬로 나누어 간단히 표기하면 식 (5)와 같다.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b \\ \mathbf{B}_s & \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

한편, 식 (5)에서 전단변형률행렬  $\mathbf{B}_s$ 는 Donea와 Lamain(1987)<sup>12</sup>이 제시한 대체전단변형률  $\bar{\mathbf{B}}_s$ 로 대체한다.

일반적으로 비적합모드를 사용하게 되면 비적합모드에 의한 변형에너지의 변화로 인해 요소는 조각시험(patch test)을 통과할 수 없는데, 이를 해결하기 위하여 B-bar방법(Zienkiewicz and Taylor 1989)<sup>16</sup>을 사용하였다. 이 방법에 의하여 비적합모드에 관계된  $\bar{\mathbf{B}}_s, \bar{\mathbf{B}}_b$ 는 다음 식의  $\bar{\mathbf{B}}_s^*, \bar{\mathbf{B}}_b^*$ 로 대체된다.

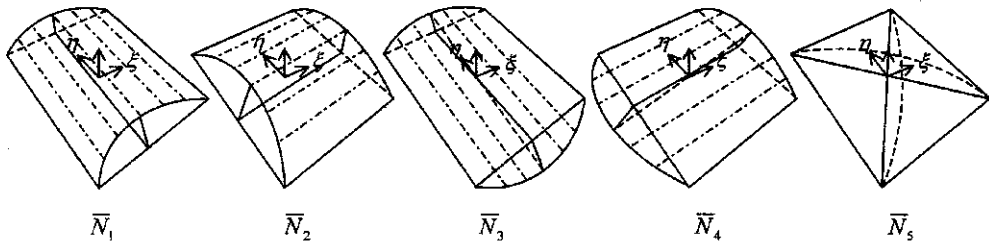


그림 2. 4절점 요소의 비적합변위모드

$$\bar{\mathbf{B}}_b^* = z \left( \frac{1}{z} \bar{\mathbf{B}}_b - \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{z} \bar{\mathbf{B}}_b dV \right) \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_s^* = \bar{\mathbf{B}}_s - \frac{1}{V} \int_V \bar{\mathbf{B}}_s dV \quad (7)$$

강성행렬은 비적합모드의 추가에 의하여 다음 식과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cn} \\ \mathbf{K}_{cn}^T & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)은 다시 정적응축으로 비적합변위를 제거하면 다음 식의 최종 강성행렬을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{cn} \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{K}_{cn}^T \quad (9)$$

식(9)에서 부행렬  $\mathbf{K}_{cc}$ ,  $\mathbf{K}_{cn}$ ,  $\mathbf{K}_{nn}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{cc} &= \int_V \bar{\mathbf{B}}_b^T \mathbf{D}_b \bar{\mathbf{B}}_b dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{B}}_s dV \\ \mathbf{K}_{cn} &= \int_V \bar{\mathbf{B}}_b^T \mathbf{D}_b \bar{\mathbf{B}}_b^* dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{B}}_s^* dV \\ \mathbf{K}_{nn} &= \int_V \bar{\mathbf{B}}_b^{*T} \mathbf{D}_b \bar{\mathbf{B}}_b^* dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^{*T} \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{B}}_s^* dV \end{aligned} \quad (10)$$

응력의 계산은 강성행렬의 구성에서와 같이 비적합 변위를 소거하여 구한다.

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] [\mathbf{B}_c \quad \mathbf{B}_n] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_n \end{Bmatrix} \\ &= [ \quad ] [\mathbf{B}_c - \mathbf{B}_n \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{K}_{cn}^T] \{\mathbf{u}_c\} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에서  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{B}_n$ 은 각각  $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_b \\ \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_b^* \\ \bar{\mathbf{B}}_s^* \end{bmatrix}$ 이다.

평판요소소의 개선은 대체형틀장만을 적용한 요소 (S)에 비적합변위를 추가한 요소(SN)와 여기에 감차적분을 수행한 요소(SNR)를 고려하였으며 표 1과 같다.

표 1. 평판요소소의 비교

Designation	Displacement field		Integration order	
	w	$\theta_x, \theta_y$	Bending	Shear
S	$\langle N \rangle \{w\}$	$\langle N \rangle \{\theta\}$	2×2	2×2
SN	$\langle N \rangle \{w\}$	$\langle N \rangle \{\theta\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{\theta}\}$	2×2	2×2
SNR	$\langle N \rangle \{w\}$	$\langle N \rangle \{\theta\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{\theta}\}$	2×2	1×1

### 3. 면내회전자유도를 가지는 평면응력요소

일반적으로 평면응력요소는 절점당 두개의 직선변위자유도( $u, v$ )를 가진다. 그러나 여기에 회전자유도( $\theta_z$ )가 추가되게 되면 요소의 거동이 크게 향상될 뿐만 아니라 평판요소와 결합되어 평면셸을 이루어 완곡한 셸(shell) 또는 절판(folded plate) 구조의 해석이나 보요소와 같이 회전자유도가 있는 요소와의 결합이 용이하다. 면내회전자유도의 고려는 Allman (1988)<sup>8)</sup>, Bergan and Fellipa(1985)<sup>17)</sup> 등에 의해 가능성이 제시되었으며, 그 후 여러 연구자들(Cook 1986, Ibrahimbegovic 1990, Choi and Lee 1996)<sup>1,6,19,25)</sup>에 의해 발표되었다.

본 연구의 평면셸에 사용된 평면응력요소소의 정식화는 Allman(1988)<sup>8)</sup>의 회전변위장을 이용하였으며 Hughes와 Brezzi(1989)<sup>23)</sup>에 의해 제안된 회전자유도를 독립변수로 가지는 변분법에 의한 정식화에 의해 회전자유도를 구현하였고 요소의 직선자유도와 면내회전자유도에 각각 비적합모드를 추가하여 요소의 거동을 개선시켰다.

평면응력요소소의 변위장은 4절점요소소의 기본형상함수  $\langle N \rangle$ 과 Allman의 회전자유도 관련 형상함수  $\langle C \rangle$ ,  $\langle S \rangle$ 와 이에 각각 추가된 비적합모드  $\langle \bar{N} \rangle$ ,  $\langle \bar{C} \rangle$ ,  $\langle \bar{S} \rangle$ 에 의하여 구성된다. 여기서  $\{\bar{u}\}$ ,  $\{\bar{v}\}$ ,  $\{\bar{\theta}_z\}$ 는 비적합변위이다.

$$\begin{aligned} u &= \langle N \rangle \{u\} + \langle C \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{u}\} + \langle \bar{C} \rangle \{\bar{\theta}_z\} \\ v &= \langle N \rangle \{v\} + \langle S \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{v}\} + \langle \bar{S} \rangle \{\bar{\theta}_z\} \\ \theta_z &= \langle N \rangle \{\theta_z\} \end{aligned} \quad (12)$$

Allman이 제시한 4절점요소소의 회전변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{8} (c_{ij} l_{ij}^2 P_{ij} - c_{jk} l_{jk}^2 P_{jk}), \\ S_j &= \frac{1}{8} (s_{ij} l_{ij}^2 P_{ij} - s_{jk} l_{jk}^2 P_{jk}) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)의 첨자  $i$ 는 순서대로 4,1,2,3,  $j$ 는 1,2,3,4,  $k$ 는 2,3,4,1이며  $P_{ij}$ 는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta), P_{23} = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2), \\ P_{34} &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta), P_{41} = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (14)$$

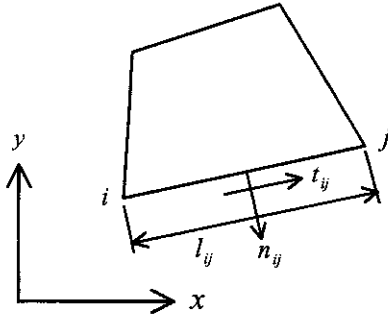


그림 3. 4절점 요소의 회전변위장

그리고  $l_{ij}$ 는 절점  $i$ 와  $j$  사이 변의 거리이며  $c_{ij}$ ,  $s_{ij}$ 는 변  $ij$ 에 수직인 방향여현  $n_{ij}$ 의 성분이다(그림 3).

요소의 거동 개선을 위해 직선변위자유도에는 그림 2의 거품형태의 모드  $\bar{N}_3$ (bubble mode)를 추가하였고 회전자유도에는 다음 식과 같이 Timoshenko의 보 이론으로 설명될 수 있는 요소의 변에 접선방향에 대한 비적합모드를 추가하였다.

$$\bar{C}_j = c_{ij}P_{ij}, \bar{S}_j = s_{ij}P_{ij} \quad (15)$$

식 (15)에서 첨자  $i$ 는 순서대로 4,1,2,3,  $j$ 는 1,2,3,4이며  $\bar{c}_{ij}$ ,  $\bar{s}_{ij}$ 는 변  $ij$ 에 접하는 방향여현  $t_{ij}$ 의 성분이다(그림 3).

정식화는 Hughes와 Brezzi가 제시한 변분방정식 (variational equation)을 적용하였는데 이들은 평형방정식, 응력의 대칭조건, 변위경사의 반대칭 부분으로 표현되는 회전의 정의 및 구성방정식을 이용하여 다음 식을 유도하였다.

$$\begin{aligned} 0 &= D \Pi_\gamma(u, \psi, skew \sigma) \cdot (v, \alpha, skew \tau) \\ &= \int_{\Omega} (symm \nabla v) \cdot C \cdot (symm \nabla u) d\Omega + \int_{\Omega} skew \tau^T \cdot (skew \nabla u - \psi) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (skew \nabla v^T - \alpha^T) \cdot skew \sigma d\Omega - \gamma^1 \int_{\Omega} skew \tau^T \cdot skew \sigma d\Omega - \int_{\Omega} v \cdot f d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

변위의 대칭부분(symmetric part)과 반대칭부분(skew-symmetric part)은 식 (17) 및 (18)과 같이 행렬형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} symm \nabla u &= [B] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} + [G] \{\theta_z\} \\ &\quad + [\bar{B}] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \end{Bmatrix} + [\bar{G}] \{\bar{\theta}_z\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} skew \nabla u - \theta_z &= [b] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} + [g] \{\theta_z\} \\ &\quad + [\bar{b}] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \end{Bmatrix} + [\bar{g}] \{\bar{\theta}_z\} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (17)과 (18)에서  $[B]$ ,  $[G]$ ,  $[b]$ ,  $[g]$ 는 적합변위와 변형률 사이의 관계를,  $[\bar{B}]$ ,  $[\bar{G}]$ ,  $[\bar{b}]$ ,  $[\bar{g}]$ 는 비적합변위와 변형률 사이의 관계를 나타내는 행렬이다. 평판요소에서의 마찬가지로 회전자유도와 비적합변위에 의해 생기는 여분의 변형에너지를 제거하여 조각 시험을 통과하기 위해  $\bar{B}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{G}$  행렬을 B-bar방법에 의하여 다음과 같이 수정한다.

$$\begin{aligned} \bar{B}^* &= \bar{B} - \frac{1}{V} \int_V \bar{B} dV, \quad \bar{G}^* = \bar{G} - \frac{1}{V} \int_V \bar{G} dV, \\ \bar{G}^* &= \bar{G} - \frac{1}{V} \int_V \bar{G} dV \end{aligned} \quad (19)$$

식 (16)-(18)로부터 힘-변위 방정식은 다음의 혼합 형태(mixed formulation)의 식으로 구성되게 된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{K} & \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h} & -\gamma V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\theta_z\} \\ \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \\ \{\bar{\theta}_z\} \\ \tau_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_{\theta_z}\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

식 (20)에서  $\bar{K}$ 는 다음 식 (21)과 같으며  $\bar{K}$ 의 부분행렬들은 식 (22)와 같다.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{cc} & \bar{K}_{cn} \\ \bar{K}_{cn}^T & \bar{K}_{nn} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{cc} &= \int_V [B \ G^*]^T D [B \ G^*] dV \\ \bar{K}_{cn} &= \int_V [B \ G^*]^T D [\bar{B}^* \ \bar{G}^*] dV \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{K}_{nn} = \int_V [\bar{B}^* \ \bar{G}^*]^T D [\bar{B}^* \ \bar{G}^*] dV$$

식 (20)에서  $\mathbf{h}$ 와  $\gamma$ 는 식 (23)과 같다.  $\gamma$ 는 문제에 의존적인 상수이며 Hughes와 Brezzi가 제안한 전단계

수의 값을 사용하였다.

$$\mathbf{h} = \int_V [\mathbf{b} \ \mathbf{g} \ \bar{\mathbf{b}} \ \bar{\mathbf{g}}]^T dV, \gamma = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (23)$$

최종적으로 강성행렬은 식(20)에서 비적합변위  $\{\bar{u}\}$ ,  $\{\bar{v}\}$ ,  $\{\bar{\theta}_z\}$ 와 응력항  $\tau_0$ 를 정적응축(static condensation) 함으로써 구한다. 한편, 응력은 다음 식에 의하여 계산한다.

$$\{\sigma\} = [D][\mathbf{B} \ \mathbf{G}^*] \{u, v, \theta_z\}^T \quad (24)$$

평면응력요소의 개선을 위해 절점당 자유도가 두개인 기본적인 평면응력요소(M0, original isoparametric membrane element)를 토대로 면내회전자유도를 갖춘 요소(M1), 면내회전자유도를 가지고 직선자유도에 비적합모드가 추가된 요소(M2), 그리고 여기에 회전자유도에까지도 비적합모드가 추가된 요소(M3)를 비교하였으며, 표 2와 같다.

#### 4. 평면셸요소의 구성

평면셸은 모든 절점이 한 평면에 있으므로 평판의 자유도와 평면응력요소의 자유도가 서로 독립적이다. 그러므로 강성행렬은 식(25)와 같이 평판요소와 평면응력요소의 독립적인 결합에 의하여 구성될 수 있다.

$$\mathbf{K}_{shell} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Plate} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{Membrane} \end{bmatrix} \quad (25)$$

3차원 전체좌표계(global coordinate) 상의 강성행렬은 국부좌표계(local coordinate) 상의 강성행렬에 회전변환행렬  $[T]$ 를 고려하여 식 (26)으로 구한다. 회전변환행렬  $[T]$ 는 전체좌표계에 대한 요소의 국부좌표계의 방향여현(direction cosine)에 의해 구성된다.

$$[K]_{Global} = [T]^T [K]_{Local} [T] \quad (26)$$

표 2. 평면응력요소의 비교

Designation	Displacement field			Integration Order
	$u$	$v$	$\theta_z$	
M0	$\langle N \rangle \{u\}$	$\langle N \rangle \{v\}$	-	2×2
M1	$\langle N \rangle \{u\} + \langle C \rangle \{\theta_z\}$	$\langle N \rangle \{v\} + \langle S \rangle \{\theta_z\}$	$\langle N \rangle \{\theta_z\}$	3×3
M2	$\langle N \rangle \{u\} + \langle C \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{u}\}$	$\langle N \rangle \{v\} + \langle S \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{v}\}$	$\langle N \rangle \{\theta_z\}$	3×3
M3	$\langle N \rangle \{u\} + \langle C \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{u}\} + \langle \bar{C} \rangle \{\bar{\theta}_z\}$	$\langle N \rangle \{v\} + \langle S \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{v}\} + \langle \bar{S} \rangle \{\bar{\theta}_z\}$	$\langle N \rangle \{\theta_z\}$	3×3

표 3. 각 요소의 고유치

$\lambda_i$	평판요소			평면응력요소		
	S	SN	SNR	M1	M2	M3
1	4.1666E-01	4.1666E-01	1.8409E-01	1.3333E-00	1.3333E-00	1.3333E-00
2	4.1666E-01	4.1666E-01	1.8409E-01	8.0000E-01	8.0000E-01	8.0000E-01
3	2.5959E-01	2.5959E-01	1.1111E-01	7.9999E-01	7.9999E-01	7.9999E-01
4	1.1111E-01	1.1111E-01	6.6668E-02	4.9844E-01	4.0918E-01	3.9185E-01
5	6.6667E-02	6.6667E-02	6.6665E-02	4.9844E-01	4.0918E-01	3.9185E-01
6	5.7068E-02	5.7068E-02	2.7496E-02	2.9999E-01	3.0000E-01	2.4444E-01
7	4.0741E-02	2.7779E-02	2.7496E-02	2.3777E-02	2.1284E-02	1.1996E-02
8	4.0741E-02	2.7779E-02	-4.0284E-07	2.3777E-02	2.1284E-02	1.1996E-02
9	2.7777E-02	2.7779E-02	-3.9520E-07	1.1852E-02	1.1852E-02	1.1853E-02
10	-1.0257E-06	-1.3950E-06	2.9939E-09	-3.4166E-08	3.4270E-08	-6.7634E-07
11	2.1181E-07	-1.3750E-06	-2.9807E-10	6.4717E-09	-2.7801E-08	4.2036E-08
12	2.0235E-07	-1.0096E-06	0.0000E-00	6.4717E-09	-5.1238E-09	-8.9044E-09

## 5. 수치해석

### 5.1 기본 수치해석

#### (a) 고유치시험 (Eigenvalue Test)

고유치시험은 변의 길이 1.0이고 탄성계수 1.0, 포아손비 0.25, 두께 1.0인 정사각형 단일 체는 모델에 대하여 평판휨요소들과 평면응력요소들을 각각 수행하였다. 결과는 표 3에서 보이는 바와 같이 평판요소 시험결과 SNR 요소는 2개의 영에너지모드를 가지고 있었으며 S, SN 요소는 가지고 있지 않았고 평면응력요소에서는 M1, M2, M3 요소 모두 영에너지모드를 가지고 있지 않았다.

#### (b) 조각시험 (Patch Test)

조각시험은 요소의 수렴성을 검증하는 방법으로 요소가 일정변형률 상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가를 검사하게 된다. 그림 4와 같은 형상의 체눈에 대하여 평판휨요소는 휨(bending), 비틀림(twisting), 면외전단(transverse shear)을 시험하였고, 평면응력요소는 인장(tension) 및 면내전단(in-plane shear)에 대하여 시험하였다. 결과는 표 4와 같으며, SNR 요소는 적분차수의 부족으로 특이성(singularity)이 발생하여 조각시험을 통과하지 못하였다.

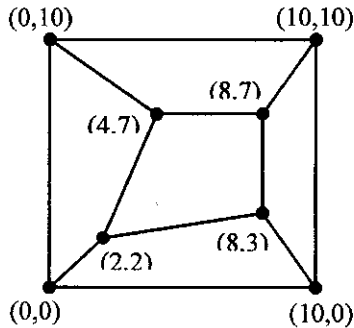


그림 4. 조각시험 요소망

표 4. 조각시험 결과

Element	Plate Bending			Element	In-plane	
	Bending	Shearing	Twisting		Tension	Shear
S	Pass	Pass	Pass	M0	Pass	Pass
SN	Pass	Pass	Pass	M1	Pass	Pass
SNR	Fail	Pass	Fail	M2	Pass	Pass
				M3	Pass	Pass

### 5.2 평판휨요소 수치해석

#### (a) 전단잠김시험 (Shear Locking Test)

그림 6-b의 집중하중을 받는 사변고정 평판의 두께를 변화시키면서 전단잠김현상을 시험하였다. 시험결과 S, SN요소는 변의 길이가 두께의  $10^7$ 배가 될 때 까지 전단잠김현상이 나타나지 않았고 SNR요소는 길이 대 두께비가  $10^4$ 이 될 때 까지 전단잠김현상은 발생하지 않았으나 그 이후 거동이 불안하였다. 전단잠김시험 결과 SN 요소가 가장 수렴영역이 길고 해가 정확하였다.

#### (b) 사각 평판 (Rectangular Plate)

네변이 고정단인 정사각형 평판을 1/4모델링하여 그림 6과 같이 정사각형모양의 정상 체눈과 찌그러진 모양의 체눈으로 해석하였다.

해석은 등분포하중 및 평판의 중앙에 집중하중이 재하된 경우에 대해 수행하였다. 대칭성을 고려하여 1/4 부분만 모델링하여 해석하였으며 상용프로그램 SAP과 비교한 결과는 표 5와 같고 SN요소의 결과와

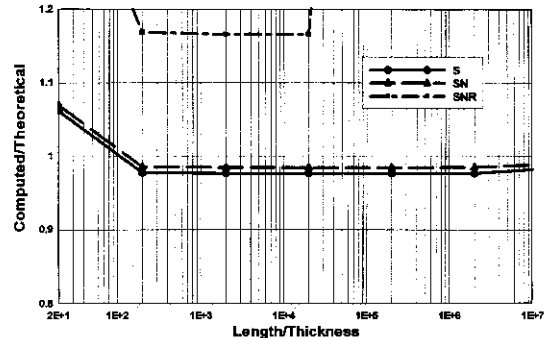
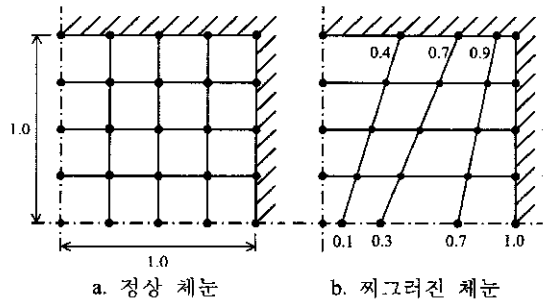


그림 5. 전단잠김시험 결과



a. 정상 체눈      b. 찌그러진 체눈

Young's Modulus = 1.7472E7  
Poisson's Ratio = 0.3  
Thickness = 0.0001

그림 6. 사각평판의 체눈 형태

표 5. 사각평판의 처짐 결과 (이론치<sup>20</sup>)로 정규화한 값)

Load	Mesh	S	SN	SNR	SAP
Distributed Load	Normal	0.993	0.998	1.056	1.047
	Distorted	1.014	1.021	1.090	1.075
Point Load	Normal	0.965	0.972	1.147	1.053
	Distorted	0.977	0.985	1.166	1.038

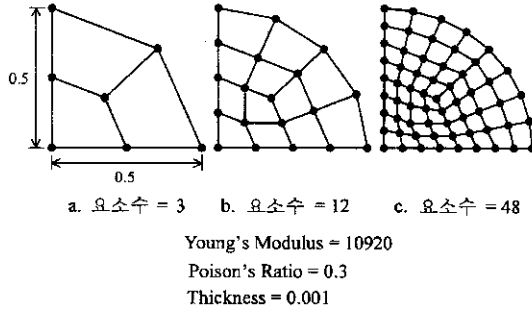


그림 7. 원형평판의 체분 형태

표 6. 원형평판의 처짐 결과 (이론치<sup>9</sup>)로 정규화한 값)

No. of Element	S	SN	SNR	QUAD4
3	0.927	0.949	0.991	0.912
12	0.983	1.000	1.008	0.965
48	1.007	1.005	1.009	0.992

가장 좋음을 알 수 있다.

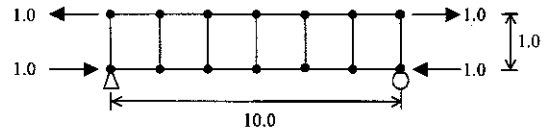
(c) 원형 평판 (Circular Plate)

평판원형요소의 수렴속도를 분석하기 위해 등분포하중이 작용하는 고정단 원형평판을 해석하였다. 대칭성을 고려하여 그림 7과 같이 1/4 부분만 모델링하였으며 MSC/NASTRAN의 QUAD4요소와 비교한 결과는 표 6과 같다. 표 6으로부터 SN 요소의 거동이 가장 좋음을 알 수 있다.

5.3 평면응력요소의 수치시험

(a) 단순보 시험 (Simple Beam Test)

단순보시험은 일종의 고차 조각시험(High Order Patch Test)으로 그림 8과 같은 단순보에 순수힘이 발생하도록 하중을 가한다. 보이론에 의한 이론치는 중앙점이 처짐 1.5이며 지점회전각은 0.6이다. 본 연구의 평면요소와 Taylor and Simo,<sup>21)</sup> Iura and Atluri<sup>14)</sup>의 결과를 표 7에 비교하였다. 표 7에서 M1, M2, M3 요소는 정확해를 보이나, Taylor and Simo

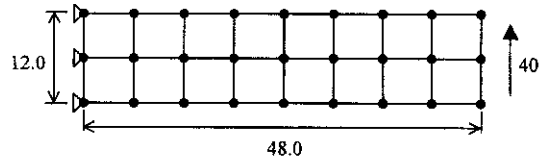


Young's Modulus = 100.0  
Poisson's Ratio = 0.0  
Thickness = 1.0

그림 8. 단순보 시험 모델

표 7. 단순보 시험 결과

Element	처짐	회전각	Element	처짐	회전각
M0	1.5	-	Taylor and Simo <sup>21)</sup>	1.5	1.2
M1	1.5	0.6	Iura <sup>14)</sup>	1.5	0.6
M2	1.5	0.6			
M3	1.5	0.6			



Young's Modulus = 30000  
Poisson's Ratio = 0.25  
Thickness = 1.0

그림 9. Cantilever(2×8mesh)

표 8. Cantilever보의 시험 결과 (이론치<sup>11</sup>)로 정규화 시킨 결과)

Element	1×4	2×8	4×16	8×32
M0	0.681	0.888	0.969	0.992
M1	0.923	0.972	0.992	0.998
M2	0.960	0.982	0.994	0.998
M3	0.982	0.988	0.996	0.999
JET(11)	0.923	0.972	0.991	-
Sabir(3)	0.922	0.971	0.991	-
Allman(8)	0.850	0.954	0.987	-

요소는 회전각이 이론해와 다름을 알 수 있다.

(b) Cantilever

그림 9와 같이 자유단에 연직하중을 받는 Cantilever를 해석하였다.

해석결과는 표 8과 같으며 JET요소,<sup>11)</sup> Sabir,<sup>3)</sup> Allman<sup>8)</sup>의 결과와 비교하였다. 다른 요소에 비해 M3



요소의 거동이 우수함을 알 수 있다.

#### 5.4 평면셀의 수치해석

평면셀요소는 위의 수치해석결과 가장 가장 좋은 거동을 보인 평판요소 SN과 평면응력요소 M3를 결합하여 구성하였다. 이 요소를 SN-M3로 명명하였으며 이 요소를 중심으로 수치해석을 하였다.

그림 10과 같이 한쪽 끝이 고정단인 곡선보에서 자유단에 면내방향으로 하중이 작용하는 경우와 면외방향으로 작용하는 경우에 대해 해석하였다. 해석 결과는 표 9와 같고 NASTRAN의 QUAD2요소, MSC/NASTRAN의 QUAD4요소, SAP의 셀요소와 비교하였다. 표 9로부터 SN-M3 요소가 타 요소에 비해 우수한 결과를 보임을 알 수 있다.

#### (b) Scordelis-Lo Roof

그림 11과 같이 양단이 격벽으로 지지된 지붕 형태의 셀 구조물을 1/4 부분만 모델링하여 해석하였다. 하중은 -Z 방향으로 셀의 단위면적당 90의 자중이 작용한다. 해석결과는 표 10과 같고 JET요소<sup>11)</sup>

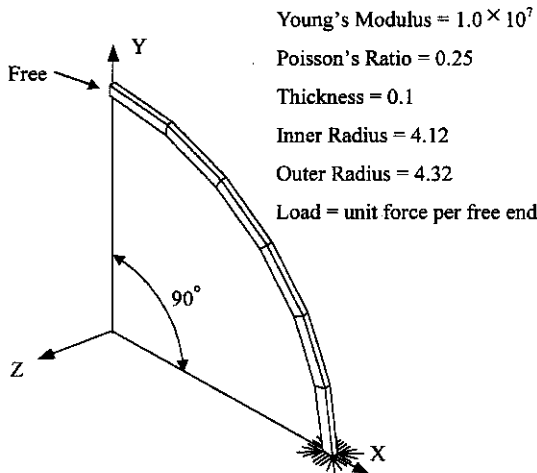


그림 10. 곡선보

표 9. 곡선보의 처짐 결과 (이론치<sup>20)</sup>로 정규화한 값)

Element \ Load	In-Plane Shear	Out-of-Plane Shear
SN-M3	0.943	0.962
QUAD2	0.025	0.594
QUAD4	0.833	0.951
SAP	0.975	0.899

MSC/NASTRAN의 QUAD4요소, SAP의 셀요소와 비교하였다. 표 10으로부터 SN-M3 요소가 타 요소에 비해 좋은 결과를 줌을 알 수 있다.

#### (c) 비틀림을 받는 Z형 단면

그림 12와 같이 한쪽 단이 고정된 얇은 절판 구조물이 비틀림을 받을 때 A, B지점에서의 응력과 C지점에서의 Z축 방향 처짐을 구하여 비교하였다. 하중은 자유단 플랜지에 각각 0.6의 연직력이 작용하여 1.2의 비틀림 모멘트를 발생시킨다. 이때 A점 중립면에서의 X방향 수직응력의 이론치는 -108이며 B점에서는 36이다. C점에서의 처짐에 대한 이론치는 없지만 요소의 수를 증가시키며 결과를 비교하였다. 해석결과는 JET요소<sup>11)</sup>, 상용프로그램인 SAP의 결과와 비교하였다.

표 10. Scordelis-Lo Roof 시험 결과 (이론치<sup>20)</sup>로 정규화한 값)

Element (Mesh)	SN-M3 (6×6)	SAP (6×6)	JET <sup>11)</sup> (8×8)	QUAD4 (8×8)
Result	0.994	0.994	0.985	0.988

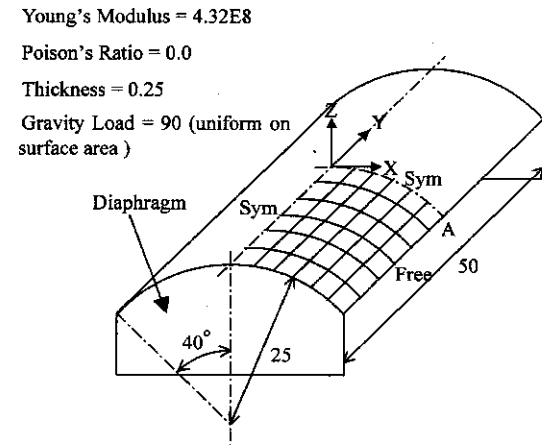


그림 11. Scordelis-Lo Roof

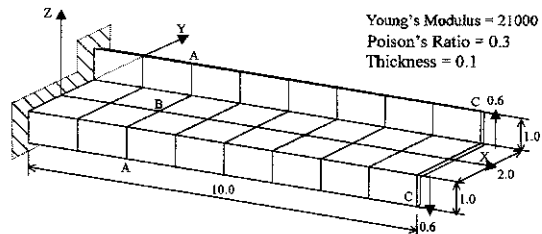


그림 12. 비틀림을 받는 Z형 단면

표 11. 비틀림을 받는 Z형 단면의 수치시험 결과 (응력은 이론치<sup>11)</sup>로 정규화한 값)

Mesh \ Element		SN-M3	JET <sup>11)</sup>	SAP
4×8	A점에서 $\sigma_x$	1.116	1.065	1.108
	B점에서 $\sigma_x$	1.070	1.000	1.070
	C점에서 $\delta_z$	0.03191*	-	0.03175*
8×16	A점에서 $\sigma_x$	1.068	-	1.045
	B점에서 $\sigma_x$	1.045	-	1.028
	C점에서 $\delta_z$	0.03217*	-	0.03187*
16×32	A점에서 $\sigma_x$	1.048	-	1.031
	B점에서 $\sigma_x$	1.042	-	1.028
	C점에서 $\delta_z$	0.03236*	-	0.03198*

$\sigma_x$ : x방향 수직 응력  $\delta_z$ : z방향 처짐 \* 비정규화 값

## 6. 결 론

본 연구에서는 비적합모드의 추가에 의해 개선된 면내회전자유도를 가지는 4절점 평면셀요소를 개발하였다. 평면셀요소를 구성하는 평판원소는 대체변형률장과 비적합모드를 혼용한 요소(SN), 대체변형률장, 비적합변위, 감차적분을 혼용한 요소(SNR)를 개발하여 이를 대체변형률장만을 사용한 요소(S)와 수치시험을 통해 비교한 결과 대체변형률장과 비적합모드를 혼용한 요소(SN)가 가장 좋은 거동을 보임을 확인할 수 있었다. 그리고, 평면응력요소 부분에서는 면내회전자유도만 가지고 있는 요소(M1), 여기에 직선 변위장에만 비적합모드가 추가된 요소(M2)와 회전 변위장에도 비적합모드가 추가된 요소(M3)를 면내회전자유도가 없는 요소(M0)와 비교한 결과 M3요소가 가장 좋은 거동을 보임을 알 수 있었다. 각각 가장 좋은 거동을 보인 평판원소 SN과 평면응력요소 M3를 결합시킨 평면셀요소 SN-M3를 중심으로 수치해석을 수행한 결과 기존 요소에 비해 우수한 결과를 얻을 수 있었다.

## 참고문헌

1. A. Ibrahimbegovic (1990) "A novel membrane finite element with an enhanced displacement interpolation," *Finite Element in Analysis and Design*, **7**, 167-179.
2. A. Ibrahimbegovic, Robert L. Taylor and Edward L. Wilson (1990) "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom," *Int. J. numer. methods eng. Eng.*, **30**, 445-457.

3. A.B. Sabir (1985) "A rectangular and a triangular plane elasticity element with drilling degree of freedom," *Proceedings of the Second International Conference on Variational Methods in Engineering*, Brebbia C.A. (ed.), Southampton University, July 1985, Springer-Verlag, Berlin, 17-55.
4. C.K. Choi and W.C. Schnobrich (1975) "Nonconforming finite element analysis of shells," *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **101**, 447-464.
5. C.K. Choi and S.H. Kim (1991) "Coupled use of reduced integration and nonconforming modes in quadratic Mindlin plate element," *Comp. Struct.*, **39**, 557-569.
6. C.K. Choi and W.H. Lee (1996) "Versatile variable-node flat shell element," *J. of Eng. Mech. (ASCE)*, **5**, 122, 432-441.
7. C.K. Choi, S.H. Kim, Y.M. Park and K.Y. Chung (1998) "Two-dimensional nonconforming finite elements: A state-of-art," *Structure Engineering and Mechanics*, **6**, 41-61.
8. D.J. Allman (1988) "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis," *Int. j. numer. methods eng.*, **26**, 717-730.
9. E. Hinton, H.C. Huang (1986) "A family of quadrilateral mindlin plate elements with substitute shear strain fields," *Comupter & Structures*, **23**, No.3, 409-431.
10. E.L. Wilson and A. Ibrahimbegovic (1990) "Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses," *Finite Element in Analysis and Design*, **7**, 229-241.
11. F. Frey, "Shell finite elements with six degrees of freedom per node," *Analytical and Computational Models of Shell*.
12. J. Donea and G. Lamain (1987) "A modified representation of transverse shear in C<sup>0</sup> quadrilateral plate element," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **63**, 183-207.
13. J.C. Simo, D.D. Fox and M.S. Rifai (1989) "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; Computational aspects," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **73**, 53-92.
14. M. Iura, and S.N. Atluri (1992) "Formulation of a membrane finite element with drilling degrees of freedom," *Comput. Mech.*, **9**, 417-428.
15. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.M. Too (1971) "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **3**, 275-290.
16. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method: Basic formulation and linear problems*, vol. I, McGraw-Hill, New York (1989).
17. P.G. Bergan and C.A. Felippa. (1985) "A triangular membrane element with rotational degrees of free-

- dom," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **50**, 25-69.
18. Ph. Jetteur And F. Frey (1986) "A four-node marquerre element for non-linear shell analysis," *Engineering Computations*, **3**, 276-282.
  19. R.D. Cook (1986) "On the Allman triangle and a related quadrilateral element," *Computers and Structures*, **22**, 1065-1067.
  20. R.H. MacNeal and R.L. Harder (1985) "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy," *Finite Elements in Analysis and Design*, **1**, 3-20.
  21. R.L. Taylor and J.C. Simo (1985) "Bending and membrane elements for analysis of thick and thin shells," *Proceedings of the NUMETA 85 Conference*, Middleton J. and Pande G.N.(eds.), Balkeman Rotterdam, 587-591.
  22. T. J.R. Hughes, M. Cohen and M. Haroun (1978) "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates," *Nuclear Eng. Desgn.*, **46**, 203-222.
  23. T.J.R. Hughes and F. Brezzi (1989) "On drilling degrees of freedom," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **72**, 105-121.
  24. 박용명, 최창근(1998) "무결점 8절점 Mindlin 평판 쉘요소의 개발," *한국전산구조공학회 논문집*, 6.
  25. 이원훈(1994) "면내 회전자유도를 가진 변이 평면 쉘요소의 개발과 이를 이용한 적응적 체는 세분화," *한국과학기술원 토목공학과 박사학위논문*.

(接受 : 1998. 11. 2)